ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE
D'ILE-DE-FRANCE

THÈSE

présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII (Denis Diderot)

spécialité :

ASTROPHYSIQUE ET MÉTHODES ASSOCIÉES

par

Sébastien FROMANG

ÉVOLUTION DES DISQUES D'ACCRÉTION PROTOPLANÉTAIRES

Soutenue le 25 Juin 2004 devant le Jury composé de :

Président : Pierre Léna
Rapporteurs : James Stone
Michel Tagger
Examinateurs : Steven Balbus
Bruno Sicardy
Caroline Terquem

Table des matières

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Caroline et Steve, qui ont dirigé ma thèse pendant ces quatre années. On entend souvent des directeurs de thèse juger leurs étudiants, j'ai aujourd'hui l'occasion de faire l'inverse. Et après quatre années passées à travailler en leur compagnie, je crois pouvoir dire que j'ai fait le bon choix. Caroline et Steve étaient toujours disponibles pour me guider ou répondre à mes questions, et grâce à eux j'ai pu rencontrer beaucoup de personnes travaillant en France ou à l'étranger. Mais finalement, ce que j'ai le plus apprécié, c'est la liberté qu'ils m'ont laissé dans mon travail. Ils ont toujours écouté mes suggestions et m'ont laissé développer mes propres idées. J'y ai gagné beaucoup d'autonomie, même si c'était souvent au prix d'une moindre efficacité. Pendant quatre ans, j'ai beaucoup appris de la grande rigueur scientifique de Caroline, en particulier lorsque j'ai du rédiger mon travail. Si un jour j'arrive à écrire des articles clairs et précis, ce sera grâce à elle. J'ai également apprécié le continu physique toujours riche des nombreuses discussions que j'ai partagées avec Steve.

Mon seul souhait maintenant est de pouvoir continuer à collaborer avec eux.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Jean-Pierre De Villiers, post-doc à l'université de Virginie, à Charlottesville. Cette thèse lui doit beaucoup. Lors de mes séjours aux Etats-Unis, c'est lui qui m'a aidé à faire mes premiers pas avec les codes numériques. Il était toujours présent à chaque fois que j'arrivai dans son bureau (c'est à dire très fréquemment, surtout au début !) pour lui poser une nouvelle question. J'ai beaucoup appris en particulier de son sens de l'organisation, très utile pour gérer la somme colossale de données et de fichiers liée à la gestion de ces codes numériques.

J'ai beaucoup apprécié l'ambiance dans le département d'astronomie de l'université de Virginie, où j'ai passé environ 6 mois pendant ma thèse à l'occasion de plusieurs séjours. J'ai été accueilli par l'ensemble des professeurs comme si je faisais partie du labo, et tout particulièrement par John Hawley qui a mis à ma disposition les moyens de calcul de son équipe et qui m'a toujours aidé lorsque j'en avais besoin. Je remercie également l'ensemble des étudiants de ce labo, et plus particulièrement Joshua Kempner, Jeffrey Crane, Scott Randall, Cameron Hummels, et Astrid Liverman. J'ai passé beaucoup de bons moments avec eux, dans les bars et les restaurants de Charlottesville, chez les uns et chez les autres...

A l'IAP, j'ai reçu de nombreux soutiens concernant le volet informatique de mon travail. Ainsi, François Bouchet et l'équipe Planck ont mis à ma disposition la machine

MAGIQUE, grâce à laquelle j'ai pu développé et surtout testé mon code dans des conditions de fonctionnement proches de celles des centres de calculs nationaux sur lesquels j'ai ensuite réalisé les simulations lourdes présentées dans la suite. Ma thèse serait restée incomplète sans le confort que m'a donné l'accès à cette machine. Didier Vibert, administrateur de MAGIQUE, m'a ainsi dépanné à de nombreuses reprises. Emmanuel Bertin et Simon Prunet m'ont aussi beaucoup aidé à installer et à utiliser mon ordinateur, Buzet, grâce auquel j'ai pu faire toutes les simulations 2D de cette thèse.

Enfin, je voudrais remercier les personnes que j'ai contoyé pendant ses quatre années, et qui ont toutes contribuée à enrichir cette thèse : Guillaume Dubus et Kristen Menou, qui ont en particulier accepté de relire une version préliminaire de mon manuscrit de thèse, Patrick Hennebelle, Emmanuel Dormy, Romain Teyssier, Stéphane Colombi, John Papaloizou, Richard Nelson, Claude Bertout, Sylvie Cabrit ainsi que tous les étudiants de l'IAP qui resteront associés aux nombreuses pauses cafés et/ou ping-pong, en particulier Jérémy Blaizot, Damien Leborgne et Brice Ménard. Enfin, Sandra, qui m'a soutenu dans les moments difficiles et supporté pendant la rédaction de ce manuscrit, a largement contribué à l'issue heureuse de ce travail.

Résumé en français et en anglais

Résumé

L'un des domaines de recherche les plus actifs concernant la physique des disques d'accrétion est la compréhension des mécanismes à l'origine du transport de moment cinétique. Deux instabilités sont susceptibles d'en être responsables dans les disques massifs et magnétisés : l'instabilité magnéto–rotationnelle (MRI), due à la présence du champ magnétique, et l'instabilité gravitationnelle lorsque la masse du disque est suffisante.

Cette thèse étudie l'évolution de ces disques d'accrétion grâce à des simulations numériques magnétohydrodynamiques (MHD) globales en tenant compte du potentiel gravitationnel créé par le disque lui–même.

Dans la première partie, des simulations bidimensionnelles à symétrie cylindrique permettent de se concentrer sur les propriétés de l'instabilité MRI dans ce type de disque : en accord avec les résultats obtenus dans les simulations de disques de faible masse, elle croît linéairement puis conduit à la turbulence MHD. La masse importante du disque modifie le profil radial de rotation dans ses parties externes.

Les simulations tridimensionnelles réalisées dans la deuxième partie montrent que la turbulence MHD et l'instabilité gravitationnelle interfèrent fortement : l'interaction non–linéaire entre les modes gravitationnellement instables et ceux excités par la turbulence entraîne une modulation périodique du taux d'accrétion sur l'objet central. De plus, la turbulence inhibe la formation de planètes par instabilité gravitationnelle lorsque l'équation d'état est isotherme.

Enfin, dans la troisième partie, des simulations numériques 2D sont effectuées pour étudier la migration des planètes de masse terrestre dans un disque magnétisé. Elles confirment l'existence, prédite par une étude récente, de deux résonances magnétiques de part et d'autre de l'orbite de la planète. Leur présence modifie le couple exercé par le disque sur la planète. Le sens de migration de la planète s'inverse lorsque le champ magnétique décroît suffisamment rapidement avec le rayon.

Abstract

One of the most active fields of research in accretion disk theory is understanding the mechanisms that transport angular momentum outward. Two instabilities are thought to be responsible for it in massive, magnetized disks : the magnetorotational instability (MRI) caused by the presence of a weak magnetic field, and gravitational instabilities.

This PhD thesis is a study of the evolution of such disks. Global magnetohydrodynamical (MHD) simulations are performed, including a self-consistent calculation of the gravitational potential.

In the first section, we restrict the calculations to axisymmetry. By eliminating from consideration the most unstable gravitational modes, these simulations primarily highlight the behaviour of the MRI, with self–gravity serving to modify the disk angular rotation profile.

The second section is fully three–dimensional. These simulations show that both instabilities strongly interact with each other : MHD turbulence excites new modes that interfere with the primary unstable gravitational mode already seen in hydrodynamic simulations. As a result the accretion rate toward the central object acquires a well–defined periodicity. In isothermal simulations, we find that turbulence prevents the fragmentation of the disk and the formation of planets.

Finally, the last section describes 2D simulations studying the migration of an earth type planet in a magnetized disk. The field is chosen to be toroidal, which in 2D is MRI–stable. In agreement with recent analytical results, the presence of two magnetic resonances on either side of the planet orbit is demonstrated. These resonances modify the torque exerted on the planet by the disk. When the field strength decreases fast enough with radius, the results show that the planet migrates outward. This is a possible mechanism to halt type I migration in protoplanetary disks.

Chapitre 1

Introduction

La formation stellaire

Les étoiles sont les briques qui composent les structures lumineuses de l'univers. Il est par conséquent essentiel de comprendre leur mécanisme de formation, que ce soit pour des applications cosmologiques (comme par exemple la modélisation de l'émission des galaxies à grand redshift) ou pour comprendre l'évolution de notre propre galaxie ou même la formation des planètes. C'est pourquoi l'étude de la première phase de la vie des étoiles a reçu une attention considérable depuis le début du XXème siècle et continue aujourd'hui de susciter un intérêt important.

Les observations millimétriques montrent que les étoiles se forment dans des nuages moléculaires géants situés dans les bras spiraux des galaxies. Ces complexes ont une taille de l'ordre de 100 parsecs (pc). Leur masse moyenne est d'environ 10^6 masses solaires ($M_\odot$). Ils contiennent des fragments de tailles et de masses diverses, respectivement 0.1 pc et 1 $M_\odot$ pour les plus petits (Larson, 2003). Ces derniers, appelés coeurs denses, sont les sites de la formation stellaire et ont été beaucoup observés dans les dernières années, en particulier dans le domaine des longueurs d'ondes millimétriques (Andre *et al.* , 2000; Ward-Thompson *et al.* , 1999).

Historiquement, il a d'abord été suggéré qu'ils se formaient à partir de petites fluctuations de densité qui étaient amplifiées par l'effet de la gravité. En effet, Jeans fut le premier à montrer au début du XXème siècle que la propagation des ondes sonores de longueur d'onde supérieure à λ_J dans un milieu homogène était instable sous l'action des forces gravitationnelles. Cette "longueur de Jeans" est donnée par :

$$\lambda_J = \frac{\pi^{1/2} c}{\sqrt{G\rho}} \tag{1.1}$$

où c est la vitesse du son dans le milieu, ρ la densité de masse et G la constante de la gravitation. Cependant, les observations des nuages moléculaires ont montré que ceux–ci étaient le siège de mouvements supersoniques, ce qui semble suggérer qu'ils sont en réalité turbulents (Falgarone *et al.* , 1992). Cette turbulence, probablement produite par les explosions de supernovae, conduit elle aussi à l'émergence de coeurs denses dans les nuages moléculaires à cause de la compression du gaz dans les chocs et les parties convergentes de l'écoulement. Dans les dernières années, de nombreuses simulations numériques ont permis de confirmer ce scénario (Mac Low & Klessen, 2004). Ces simulations suggèrent en particulier que les coeurs denses sont des structures dynamiques, et non pas en évolution quasi–statique comme il avait été imaginé un temps.

À petite échelle, les observations montrent que la turbulence devient subsonique. Elle perd de son influence dynamique, et l'effondrement des coeurs denses qu'elle a initié à plus grande échelle devient une compétition entre gravité et pression thermique. Divers modèles ont tenté de décrire cet effondrement de manière auto–similaire (Larson, 1969; Penston, 1969; Shu, 1977), mais ils négligent la présence des champs magnétiques et l'importance de la rotation. Le second élément est crucial : en effet, les observations (Goodman *et al.* , 1993) comme les simulations (Mac Low & Klessen, 2004) montrent que les coeurs denses sont en rotation et on estime que la quantité de moment cinétique qu'ils renferment est de trois ordres de grandeur supérieure à celle qui est contenue dans une étoile de type solaire. C'est le grand "problème du moment cinétique" : il faut trouver un mécanisme physique qui permette au coeur dense de s'en séparer lors de son effondrement. Or, la première partie de cet effondrement est à symétrie sphérique et conserve le moment cinétique de chaque particule fluide. Elle conduit à la formation d'un disque. C'est donc au sein de ce disque que la matière perd son moment cinétique. Lors de sa formation, celui–ci est généralement d'une masse comparable à celle de l'étoile en formation, comme en témoigne le résultat de nombreuses simulations numériques (Bate, 1998; Bodenheimer *et al.* , 1990; Hennebelle *et al.* , 2004; Yorke *et al.* , 1993). L'objectif de cette thèse est d'étudier les processus de transport dans ces disques massifs, en incluant en particulier l'effet du champ magnétique négligé dans les simulations mentionnées ci–dessus.

Dans les parties qui suivent, je détaille les propriétés générales des disques d'accrétion avant de m'intéresser aux mécanismes physiques qui participent au transport du moment cinétique.

Les disques d'accrétion

Comme je l'ai mentionné précédemment, il semble que les disques d'accrétion se forment dès les premières phases de la formation stellaire. Ils sont ensuite présents pendant une dizaine de millions d'années (Hartmann, 1998) avant de disparaître. Pour décrire la formation des étoiles de faible masse (i.e. de masse similaire à celle du Soleil), on distingue quatre phases dans leur évolution, définies sur des critères observationnels. Elle sont rappelées sur la figure 1.1, extraite de la thèse de Lachaume (2003) :

- **La classe** 0 correspond à la première phase de l'effondrement du coeur dense, au cours de laquelle la rotation est peu importante. Le disque est alors inexistant, ou de très petite taille.

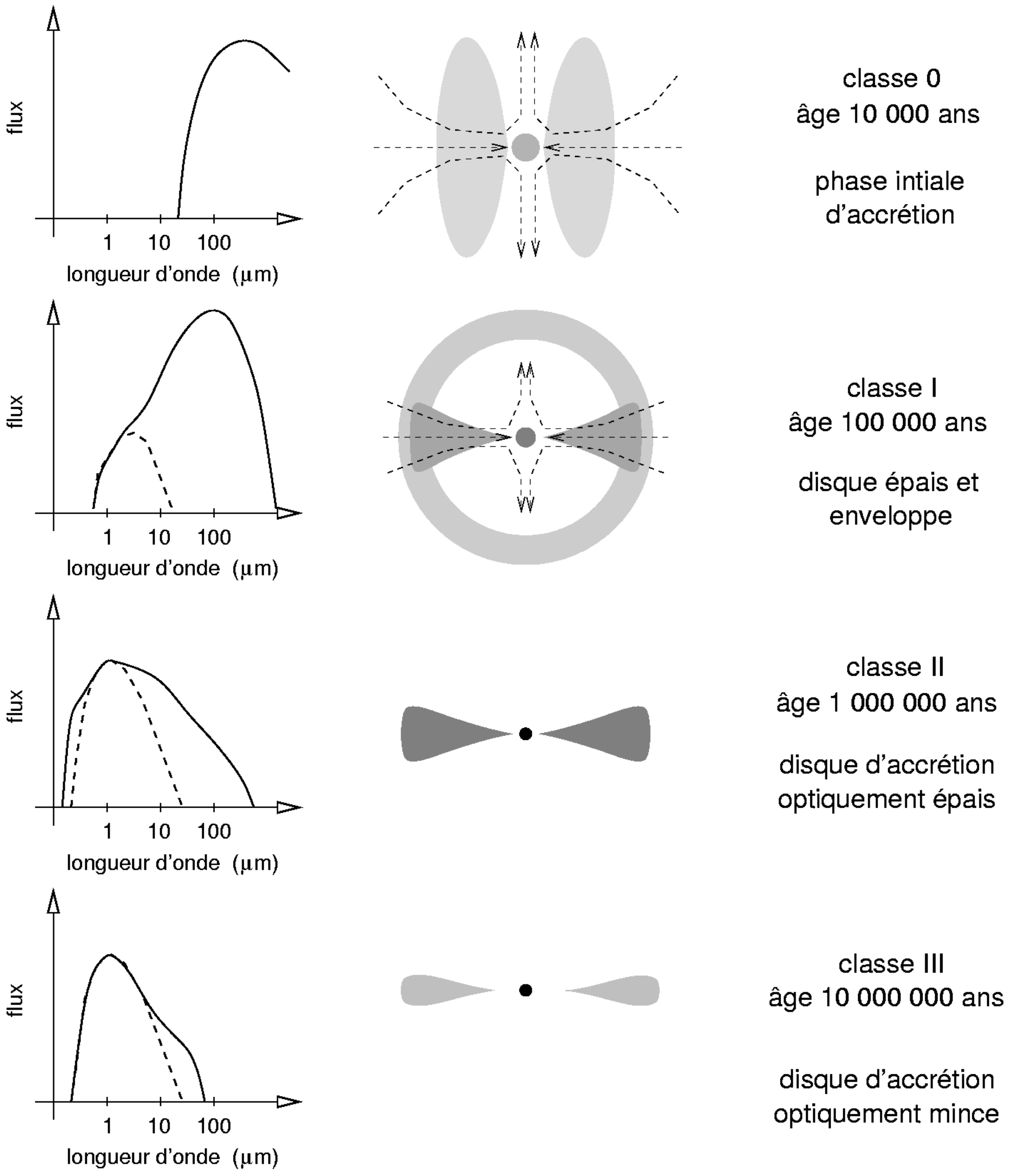

FIG. 1.1 – *Différentes phases de la formation stellaire : la colonne de gauche montre la distribution spectrale d'énergie au cours de chaque étape, la colonne du milieu l'aspect de l'objet et celle de droite rappelle l'âge approximatif de l'étoile. Extrait de Lachaume (2003).*

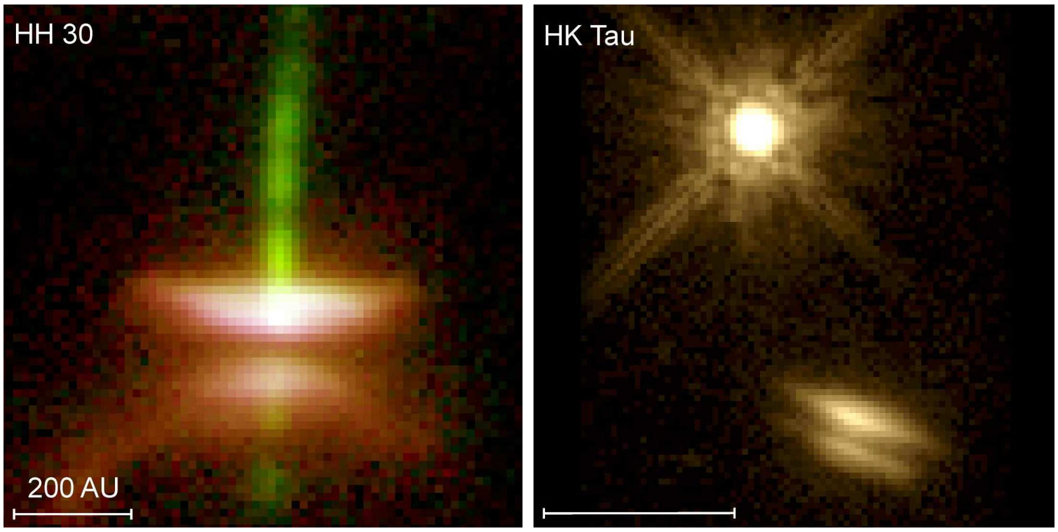

FIG. 1.2 – *Images des objets HH30 (à gauche) et HK Tau (à droite) prises avec le télescope spatial Hubble dans le domaine visible. Toutes deux montrent un disque d'accrétion de classe II vu par la tranche. Un jet perpendiculaire au plan équatorial du disque est même visible dans le cas de HH30. L'échelle physique approximative est indiquée dans le coin en bas à gauche de chaque image.*

- **La classe** *I* commence après quelques milliers d'années lors de la formation du disque. L'émission produite est essentiellement celle de l'enveloppe résiduelle en effondrement, observée dans l'infrarouge lointain (quelques centaines de micromètres).
- L'entrée dans **la classe II** se produit lorsque l'enveloppe se dissipe et révèle le disque d'accrétion. Sa présence est diagnostiquée par un excès d'émission dans l'infrarouge et par des raies d'émission dans l'ultraviolet qui se superposent au spectre de l'étoile, qui est appellée alors étoile de type T–Tauri. A ce stade, la masse de cette dernière est proche de la masse qu'elle aura pendant le reste de sa vie. Quant au disque, il est environ 100 fois moins massif.
- Enfin, on parle de **classe III** lorsque les raies d'émission associées à l'accrétion ont disparu. Le disque est alors très peu massif et optiquement mince.

Les moyens observationnels actuels permettent la mise en évidence des disques d'accrétion (en particulier ceux de classe II) de manière directe et parfois spectaculaire. En effet, lorsqu'ils sont vus par la tranche, le télescope spatial Hubble peut réaliser des clichés sur lesquels le disque apparaît comme une ligne sombre qui absorbe la lumière émise par l'étoile T–Tauri centrale. C'est en particulier le cas sur la figure 1.2, sur laquelle on peut voir les objets HH30 (*image de gauche*) et HK Tau (*image de droite*). Les disques sont bien visibles en absorption sur les deux clichés, et un jet s'échappant du système est même observé dans le cas de HH30. Ces images, ainsi que d'autres observations à haute résolution angulaire, ont permis ces dernières années de quantifier certaines propriétés importantes des disques d'accrétion : ils ont une taille typique de l'ordre de plusieurs centaines à un millier d'unités astronomiques (UA). Des mesures de l'excès d'émission infrarouge ont également permis de conclure que le taux d'accrétion sur l'étoile centrale est de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-7} $M_\odot$ par an (Basri & Bertout, 1993; Hartmann, 1998). De plus, Weintraub *et al.* (1989) et Dutrey *et al.* (1994) ont montré par des observations millimétriques du monoxyde de carbone que ces disques sont en rotation Keplerienne autour de l'étoile centrale, en accord avec les prévisions théoriques.

L'intérêt pour les disques d'accrétion ne se limite pas aux problèmes liés à la formation stellaire. En effet, les disques d'accrétion sont également supposés être le lieu de formation des planètes. La récente découverte de la première planète extrasolaire (Mayor & Queloz, 1995), bientôt suivie de nombreuses autres (le nombre de planètes connues dépasse aujourd'hui la centaine), a renforcé l'intérêt porté aux disques et en particulier à la dynamique de l'interaction disques–planètes. Dans le chapitre 5 de cette thèse, je présenterai le travail que j'ai réalisé sur la migration des planètes de masse terrestre dans un disque magnétisé.

Sur le plan théorique, la question centrale depuis une trentaine d'années est de comprendre le (ou les) mécanisme(s) physique(s) à l'origine du transport de masse vers les parties internes du disque. Comme le moment cinétique spécifique dans le disque croît avec le rayon, cette redistribution de la masse doit s'accompagner d'un transport du moment cinétique vers les parties externes du disque. On a d'abord pensé que le frottement entre deux anneaux adjacents de moment cinétique différent pouvait en être à l'origine, mais la viscosité moléculaire est trop faible et il est apparu nécessaire d'invoquer la présence de mouvements turbulents dans le disque (Shakura & Sunyaev, 1973; Lynden-Bell & Pringle, 1974). Ceux–ci conduisent à une augmentation anormale du transport de moment cinétique en imitant la présence d'une viscosité élevée. Ce type de raisonnement a conduit pendant longtemps à des modèles de disques dans lesquels la turbulence est simplement paramétrée par une viscosité anormale à laquelle on donne une forme mathématique simple. En revanche, l'origine physique de la turbulence est restée longtemps méconnue. Par analogie avec les écoulements de Couette, il a été proposé par certains auteurs qu'elle pourrait être d'origine hydrodynamique (Richard & Zahn, 1999; Longaretti, 2002), mais les résultats analytiques et numériques suggèrent que ce n'est pas le cas, en particulier en raison de l'influence stabilisatrice de la force de Coriolis (Balbus, 2003; Hawley *et al.* , 1999). Finalement, une possibilité est apparue en 1991 avec la découverte de l'instabilité magnéto–rotationnelle (Balbus & Hawley, 1991; Hawley & Balbus, 1991). Les études de ces dix dernières années ont montré qu'elle est effectivement à l'origine de turbulence dans les disques magnétisés. Ses caractéristiques sont décrites en détail dans le paragraphe suivant.

Enfin, mentionnons que dans les disques massifs auxquels je m'intéresse dans cette thèse, des instabilités gravitationnelles se développent (comme dans les disques galactiques) et agissent également comme agent du transport de moment cinétique. Ce mécanisme est important pour l'évolution des disques protoplanétaires dans les premières phases de leur évolution et il sera décrit plus en détail dans la suite.

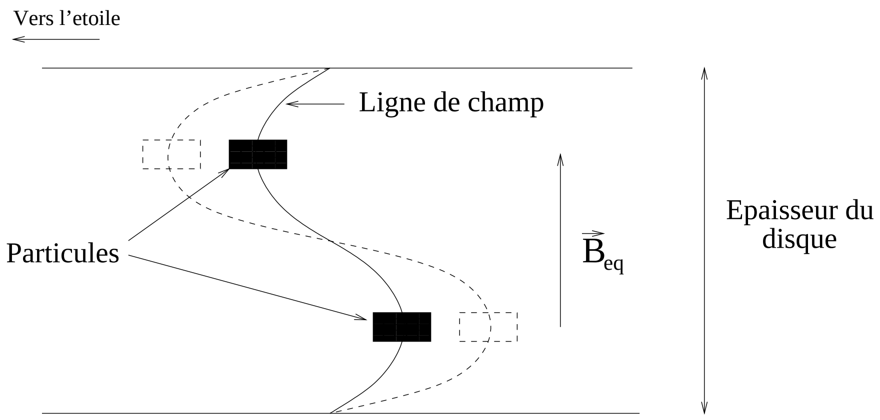

FIG. 1.3 – *Illustration du mécanisme physique de l'instabilité magnéto–rotationnelle. Le dessin montre une portion de disque d'accrétion vue par la tranche, traversé à l'équilibre par un champ magnétique purement vertical. Sous l'action d'une perturbation, les lignes de champ sont distordues. Dans l'approximation MHD, les particules fluides se déplacent avec elles en conservant leur vitesse angulaire. Cependant, l'attraction gravitationnelle par l'étoile centrale diminue avec le rayon, ce qui rend la situation instable.*

L'instabilité magnéto–rotationnelle

Comme je l'ai déjà souligné plus haut, l'instabilité magnéto–rotationnelle (MRI) a été mise en évidence en 1991 par Balbus et Hawley. Sa découverte a provoqué une avancée majeure dans la théorie des disques d'accrétion et a entraîné de nombreuses études et simulations numériques dans les 13 dernières années. Tous ces travaux sont résumés dans la revue de Balbus & Hawley (1998), dans laquelle le lecteur pourra trouver une discussion des nombreux points qui ne seront pas évoqués dans la présentation forcément succincte de l'instabilité faite dans le cadre de cette thèse.

Le mécanisme physique de l'instabilité est résumé sur la figure 1.3. Elle montre un disque d'accrétion vu par la tranche, traversé par un champ magnétique initialement purement vertical. On se place ici dans l'approximation dite "MHD idéale", c'est à dire que les lignes de champ et les particules fluides sont liées dans leur mouvement (voir le chapitre 2 pour plus de détails sur les conditions d'applications de cette approximation). Cette hypothèse entraîne en particulier qu'une particule fluide, lorsqu'elle est perturbée, continue à tourner à la vitesse angulaire de sa ligne de champ, c'est à dire à la vitesse angulaire qu'elle avait dans sa position d'équilibre. Or, dans les disques d'accrétion, la vitesse angulaire à l'équilibre décroît vers l'extérieur sous l'influence de la masse de l'étoile centrale. Donc, si une particule fluide est déplacée vers les parties internes du disque en conservant sa vitesse angulaire, sa force centrifuge devient trop faible pour contrebalancer la force gravitationnelle éxercée par l'étoile centrale et elle continue à se rapprocher de celle–ci. La situation est instable. Comme le montre la figure 1.3, il faut que la hauteur du disque soit plus grande que la longueur d'onde verticale de la perturbation, ce qui signifie que le champ magnétique doit être suffi-

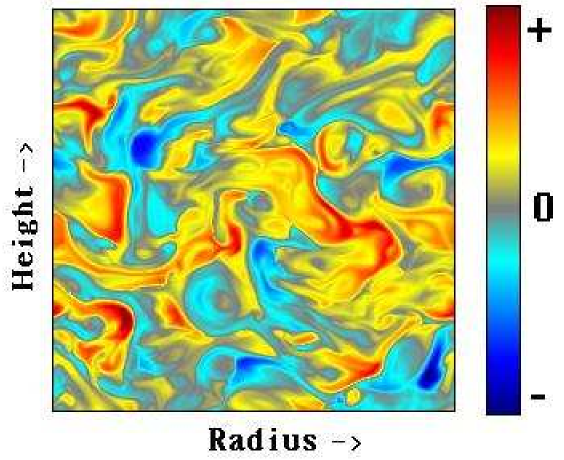

Fig. 1.4 – *Perturbation de moment cinétique dans une simulation 2D locale préservant la symétrie cylindrique. Le champ magnétique initial n'a pas de flux net. La saturation de l'instabilité MRI a conduit l'écoulement à devenir complètement turbulent. Extrait de Hawley & Balbus (1992).*

samment faible pour que la perturbation puisse "tordre" les lignes de champ en dépit de leur tension. Le critère précis est que le rapport entre la pression magnétique et la pression thermique doit rester inférieur à 1. Balbus & Hawley (1991) ont montré que ces deux conditions, (i) un gradient radial de vitesse angulaire négatif et (ii) un champ magnétique faible, sont les seules conditions nécessaires à l'instabilité tant que les hypothèses de l'approximation MHD sont vérifiées.

L'instabilité MRI est une instabilité linéaire. Une fois ses propriétés bien comprises, les conséquences de son évolution non–linéaire ont été étudiées. Hawley & Balbus (1992) ont montré par des simulations bidimensionnelles locales que le disque devient turbulent lors de la saturation de la phase linéaire. Ceci est illustré sur la figure 1.4 qui reproduit les fluctuations de moment cinétique obtenues dans ces simulations. Le caractère turbulent de l'écoulement est évident. Cependant, l'intérêt des ces résultats est limité car la turbulence MHD disparaît dans une simulation 2D à cause du théorème de Cowling, ou théorème anti–dynamo (Shu, 1992). Cela empêche en particulier de faire des simulations de très longue durée. Hawley *et al.* (1995) et Brandenburg *et al.* (1995) ont donc réalisé des simulations locales tridimensionnelles qui ont confirmé la transition vers la turbulence et le caractère permanent de l'état obtenu. Elles ont aussi montré que la turbulence transporte le moment cinétique vers les parties externes du disque et la matière vers les parties internes. Ce résultat est fondamental pour l'étude de la dynamique des disques d'accrétion. De plus, les simulations se sont révélées être quasiment indépendantes de la topologie du champ magnétique. Hawley *et al.* (1995) ont en effet testé des configurations avec un champ initial orthoradial, d'autres avec un champ initial poloidal avec ou sans flux net. Dans chaque cas, l'instabilité MRI se développe, croît, et le disque devient turbulent. En fait, seul le niveau de satura-

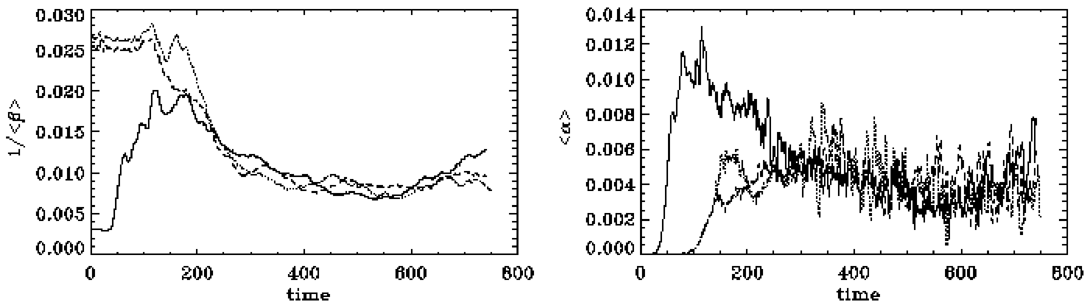

FIG. 1.5 – *Evolution temporelle de l'énergie magnétique normalisée par la pression (figure de gauche). La courbe en trait pleins montre une simulation qui commence avec un champ magnétique vertical, et les deux autres ont initialement un champ orthoradial. Dans chaque cas, le flux du champ est nul. Pour les trois simulations, $1/\langle\beta\rangle \simeq 0.01$ à saturation. La figure de gauche montre la moyenne volumique de α pour les mêmes modèles. Malgré de larges oscillations, elle semble converger vers une valeur commune de 5×10^{-3}. Extrait de Steinacker & Papaloizou (2002).*

tion change d'une simulation à l'autre, et avec lui le taux de transport de moment cinétique. Ce taux est traditionnellement mesuré par le paramètre α, qui est le rapport de la composante $W_{r\phi}$ du tenseur des contraintes et de la pression. Il a été introduit pour la première fois par Shakura & Sunyaev (1973) et utilisé depuis dans de nombreux modèles semi–analytiques de disques. Dans ces modèles, son expression est reliée de manière phénoménologique à la viscosité. La structure obtenue pour le disque est ensuite comparée aux observations, ce qui souligne l'importance de la détermination de α, du moins en ordre de grandeur. Les simulations locales 3D ont montré que α est compris entre 10^{-3} et quelques dixièmes selon la topologie du champ. Les grandes valeurs sont notamment atteintes lorsqu'un champ vertical avec un flux net est présent tandis que les simulations commençant avec un champ orthoradial sans flux net donnent les taux de transport de moment cinétique les plus faibles. À l'heure actuelle, la configuration du champ n'est pas contrainte par les observations. Si un champ initial est présent à grande échelle dans le coeur dense, il est probable qu'un flux net non nul traverse le disque d'accrétion. Cependant la rotation différentielle a tendance à privilégier un champ orthoradial, ce qui rend cette question assez incertaine. Il faudra problement attendre l'arrivée de l'interferomètre radio ALMA pour avoir une meilleure idée de la topologie du champ. Enfin, pour conclure cette discussion sur les propriétés mises en évidence par les simulations 3D locales, mentionnons les simulations de Hawley *et al.* (1996) qui ont montré que l'instabilité MRI possède intrinsèquement un effet dynamo : elle parvient à amplifier puis à maintenir un champ initial aléatoire.

Après cette première génération de calculs 3D locaux, l'amélioration des moyens de calculs a permis la réalisation de simulations globales de disques magnétisés (Armitage, 1998; Hawley, 2000, 2001; Steinacker & Papaloizou, 2002). Elles ont tout d'abord confirmé les résultats des simulations locales. Par exemple, la figure 1.5 montre le niveau de saturation de la turbulence pour des simulations réalisées par Steinacker & Papaloi-

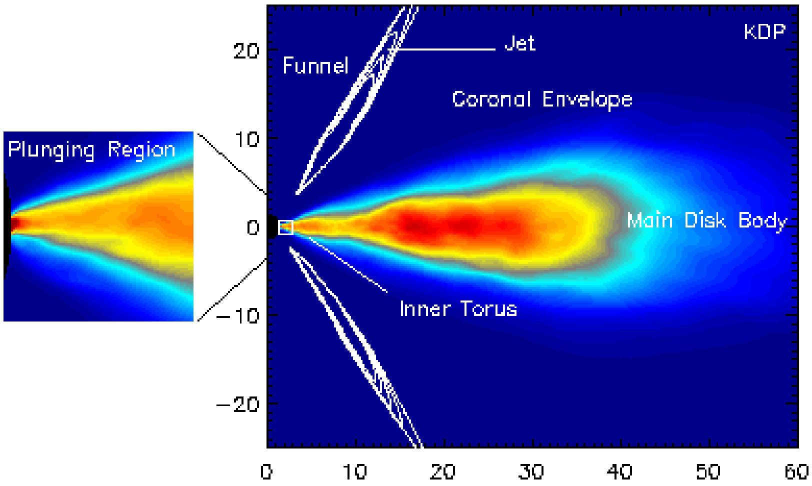

FIG. 1.6 – *Structure d'un disque d'accrétion évoluant autour d'un trou noir (dans une métrique relativiste) sous l'action de la turbulence MHD. On note en particulier l'apparition d'un jet et d'une couronne de part et d'autre du plan équatorial du disque. Extrait de De Villiers* et al. *(2003).*

zou (2002) et commençant avec un champ magnétique sans flux net (*figure de gauche*), et la valeur correspondante de α obtenue (*figure de droite*). De plus, ces simulations globales ont permis pour la première fois de décrire des modèles de disques découlant seulement de principes physiques de base, sans ajout de paramètres ad–hoc ou d'une description phénoménologique de la turbulence, comme dans le cas des modèles de disques α. Un exemple d'une telle structure est montré sur la figure 1.6, extraite de De Villiers *et al.* (2003). Elle représente une coupe de la densité dans un disque qui évolue autour d'un trou noir dans une métrique relativiste. On peut y voir la matière du disque plongeant sur la singularité centrale sous l'action de la turbulence MHD. Le disque est bordé de part et d'autre de son plan équatorial par une enveloppe coronale fortement magnétisée et où la densité est faible. Enfin, un jet semble être expulsé le long de l'axe de symétrie du système par les parties internes du disque. Il faut noter que, même de nos jours, toutes ces simulations 3D sont extrêmement coûteuses en temps de calcul et nécessitent l'utilisation de machines parallèles très puissantes. Ainsi, même si elles donnent probablement une assez bonne idée de l'évolution des disques, la physique qui y est décrite ainsi que la résolution numérique utilisée sont encore des facteurs limitants.

Une décennie de calculs analytiques et de simulations numériques a donc modifié dramatiquement notre perception des disques d'accrétion. L'instabilité MRI apparaît aujourd'hui comme un mécanisme fondamental pour comprendre leur dynamique et de nombreuses études sont toujours en cours pour en affiner notre compréhension. Mais un problème important demeure toutefois posé dans le cas particulier des disques d'accrétion protoplanétaires : ils sont très froids et très denses. Le taux d'ionisation y est par conséquent très faible et le couplage entre le champ magnétique et les particules

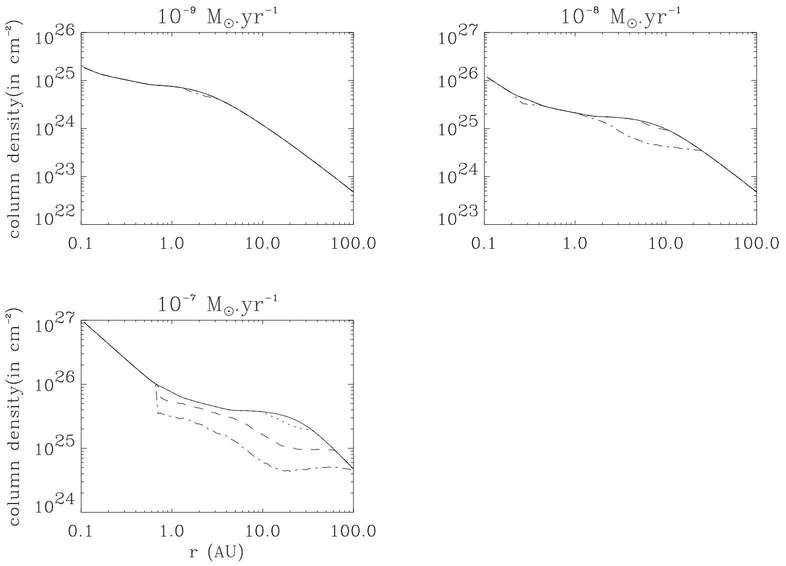

FIG. 1.7 – *Chaque figure montre en trait plein la densité de colonne d'un disque pour lequel $\alpha = 10^{-2}$ et pour différents taux d'accrétion. La densité de colonne de la zone turbulente est représentée pour différentes abondances métalliques : $x_M = 10^{-13}$ (traits point–tirets), $x_M = 10^{-12}$ (traits tirets) et $x_M = 10^{-11}$ (traits pointillés). Le disque est complètement turbulent lorsque les deux courbes coïncident, i.e. lorsque la densité de colonne totale et celle de la zone turbulente sont égales. Tiré de Fromang* et al. *(2002).*

fluides n'y est donc pas total partout ; on sort de l'approximation MHD idéale. Dans ce cas, des phénomènes dissipatifs interviennent qui peuvent faire disparaître la turbulence. Leur importance est mesurée par le nombre de Reynolds magnétique R_{em} défini par la relation :

$$R_{em} = \frac{c_s H}{\eta} \tag{1.2}$$

où c_s est la vitesse du son, H la hauteur du disque et η la resistivité du plasma. Lorsque le taux d'ionisation x_e diminue, η augmente et donc R_{em} diminue. Au dessous d'un certain seuil, la turbulence MHD disparaît. Fleming *et al.* (2000) ont montré par des simulations numériques locales que la transition a lieu lorsque $R_{em} \sim 100$ quand la turbulence MHD est initiée par un champ magnétique vertical avec un flux net. Ce seuil est franchi lorsque $x_e \leq 10^{-13}$ (Balbus & Hawley, 2000). Cette valeur critique de x_e peut sembler minuscule mais elle est en réalité difficile à atteindre dans certaines parties des disques protoplanétaires. Notons que des observations récentes à l'échelle de quelques centaines d'UA (Ceccarelli *et al.* , 2004) concluent à des taux d'ionisation supérieurs à 10^{-10}, ce qui suggère qu'ils sont suffisamment ionisés au moins dans leurs parties les plus externes.

Quelles sont les sources de chauffage dans le disque ? Tout d'abord, la turbulence elle-même, lorsqu'elle est présente. Elle peut chauffer suffisamment le disque pour produire des électrons par simple ionisation thermique. Ce mécanisme est efficace dans les parties internes ($r \leq 1$ AU). Dans les parties externes, certains auteurs ont proposé que le disque soit ionisé par des rayons cosmiques (Gammie, 1996) ou par des rayons X émis par l'étoile T–Tauri elle–même (Glassgold *et al.* , 1997, 2000). Il a ainsi été proposé par Gammie (1996) que seules les couches superficielles du disque sont couplées au champ magnétique (on parle de zone active), tandis que la zone autour du plan équatorial n'est pas turbulente (elle est qualifiée de zone morte).

Afin de préciser la taille de cette zone morte, nous avons calculé le taux d'ionisation dans le disque. Il permet d'évaluer le nombre de Reynolds magnétique et donc de décider si le disque est turbulent ou laminaire. Les modèles de disques que nous avons utilisés ont été calculés par Papaloizou & Terquem (1999). Ils décrivent la structure radiale et verticale pour une valeur donnée de α et du taux d'accrétion. Le résultat principal de cette étude est résumé sur la figure 1.7. Elle montre la structure d'un disque pour lequel $\alpha = 10^{-2}$ et pour divers taux d'accrétion. Sur chacune des figures, la courbe en trait plein est la densité de colonne totale et les autres courbes montrent la densité de colonne de la zone active du disque pour différentes abondances métalliques (en effet, la présence de métaux influe sur les processus de recombinaison des électrons). Le disque est complètement turbulent lorsque les deux courbes coïncident. En particulier, un disque avec $\alpha = 10^{-2}$ et $\dot{M} = 10^{-8}$ $M_\odot$ par an et dont l'abondance métallique x_M est supérieure à 10^{-12} (ce qui correspond à un millionième de son abondance interstellaire) est complètement turbulent. En revanche, il subsiste une zone morte lorsque le taux d'accrétion est plus grand ou la valeur de α plus petite.

La conclusion de ce travail est que le taux d'ionisation dépend beaucoup des processus chimiques encore assez méconnus qui sont à l'oeuvre dans les disques. Le détail des résultats obtenus lors de cette étude, que j'ai réalisée au cours de mon stage de DEA puis au début de ma thèse, a été publié en 2002 dans la revue *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* dans un article intitulé *"The ionization fraction in α models of protoplanetary discs"*. Il est reproduit dans l'annexe A.

L'instabilité gravitationnelle

Dans le cas particulier des disques massifs, j'ai déjà mentionné la possibilité de la croissance d'instabilités gravitationnelles, qui sont également susceptibles de transporter radialement le moment cinétique. Elles se manifestent par exemple dans les galaxies sous la forme de bras spiraux ou de barres, ce qui donne parfois lieu à des images spectaculaires. Sur le plan théorique, Toomre (1964) a été le premier à étudier la stabilité d'un disque massif d'étoiles. Il a montré que si sa masse était suffisamment grande ou si la dispersion de vitesse des étoiles était suffisamment faible, alors une perturbation qui conserve la symétrie cylindrique pouvait le déstabiliser. L'étude s'étend aux disques gazeux infiniment fins (Binney & Tremaine, 1987) pour lesquels le critère de stabilité s'exprime en fonction du paramètre de Toomre Q défini par :

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma}\,, \tag{1.3}$$

où Σ la densité surfacique de masse et κ est la fréquence épicyclique dans le disque définie à partir de la vitesse angulaire Ω et du rayon r :

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3}\frac{d(r^4\Omega^2)}{dr}\,. \tag{1.4}$$

Lorsque $Q < 1$, une instabilité à symétrie cylindrique se développe dans le disque. Il est stable lorsque Q est supérieur à quelques fois l'unité (c'est le cas par exemple des disques de faible masse). Enfin, lorsque Q est de l'ordre de 1 (mais supérieur à 1), des instabilités asymétriques peuvent apparaître. À cause de la rotation différentielle, elles prennent généralement la forme de spirales. En pratique, on retiendra comme ordre de grandeur que des instabilités apparaissent lorsque la masse du disque est du même ordre que la masse de l'objet central.

Ces critères de stabilité, calculés analytiquement dans le cas des disques infiniment fins, sont toujours qualitativement valables lorsque l'épaisseur du disque est prise en compte. Mais la détermination précise des conditions de stabilité des disques tridimensionnels nécessite le recours à des méthodes numériques. De plus, ces simulations apportent des indications sur le niveau de saturation de l'instabilité linéaire, et donc sur le taux de transport de moment cinétique. Elles permettent également d'étudier l'évolution non–linéaire du système. Ainsi, dans le cadre de la dynamique galactique, de nombreuses simulations N–corps ont permis de mieux comprendre la dynamique des barres et leur interaction avec les ondes spirales (Binney & Tremaine, 1987). En ce qui concerne le problème de la formation stellaire, de nombreux auteurs ont également abordé la question de l'évolution des disques protoplanétaires massifs par des simulations hydrodynamiques.

Tohline & Hachisu (1990) et Woodward *et al.* (1994) ont ainsi étudié les propriétés des modes linéairement instables (taux de croissance, profil radial du mode, etc...) en fonction des paramètres globaux du disque. Grâce à des simulations 2D, Laughlin *et al.* (1997) ont étudié le mécanisme de saturation de l'instabilité gravitationnelle. Ils ont montré que celle–ci est due à un couplage entre différents modes propres. Enfin, d'autres simulations 3D (Pickett *et al.* , 1996) se sont penchées sur l'évolution non–linéaire et ont mis en évidence le transport de matière vers les parties internes du disque dû au couple gravitationnel exercé par les bras spiraux sur la matière. En conséquence, la densité surfacique de masse diminue dans les parties externes du disque, le paramètre de Toomre croît et l'instabilité disparaît progressivement si le disque n'est pas alimenté continuellement en masse.

Au cours de ces diverses études, il est assez vite apparu que l'équation d'état du gaz était très importante (Pickett *et al.* , 1998, 2000a). En particulier, le niveau de saturation de l'instabilité est plus élevé dans le cas d'une équation d'état isotherme (pour laquelle la température en chaque point est constante au cours du temps) que dans le cas d'une équation d'état adiabatique utilisée dans les simulations mentionnées plus haut.

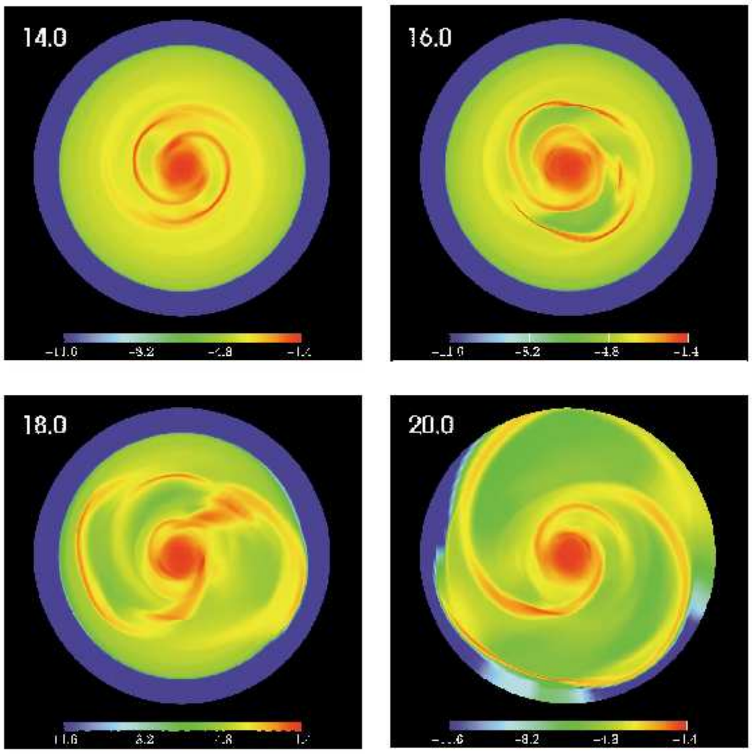

FIG. 1.8 – *Evolution non linéaire des modes instables dans un disque massif localement isotherme. Chaque image montre la densité dans le plan équatorial du disque. Le temps, indiqué dans la partie supérieure gauche des cadres, est mesuré en orbites au rayon interne initial du disque. Des structures asymétriques très marquées apparaissent dans le disque et transportent le moment cinétique vers les parties externes. Tiré de Pickett* et al. *(1998).*

À titre d'exemple, la figure 1.8 montre l'évolution temporelle de la densité de masse dans le plan équatorial du disque pour un modèle dont l'équation d'état est localement isotherme. Des bras spiraux très marqués apparaissent et modifient considérablement l'état initial. À l'inverse, l'évolution d'un disque dans des conditions adiabatiques est beaucoup plus régulière et bien moins violente, car les chocs qui apparaissent dans les bras spiraux contribuent à chauffer le disque et à augmenter la valeur de Q.

Dans le cadre de simulations localement isothermes, certains auteurs (Boss, 1998; Mayer *et al.* , 2002, 2004) ont même observé la fragmentation du disque et l'apparition de planètes massives lorsque le paramètre de Toomre était proche de 1. Ces résultats sont illustrés par exemple par la figure 1.9, sur laquelle de nombreux fragments orbitants dans le disque sont visibles. Les conséquences sont importantes car une des théories de formation des planètes massives fait justement appel à des instabilités gravitationnelles. Cependant, les résultats obtenus dans ce type de simulations sont toujours sujet à débat et demandent confirmation. En effet, Pickett *et al.* (2000b) n'ont pas pu les confirmer en réalisant des calculs d'évolution similaires.

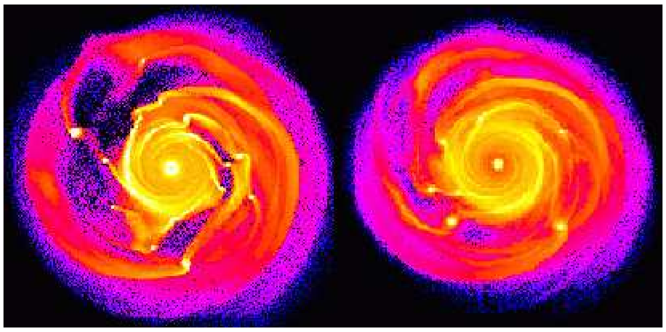

Fig. 1.9 – *Évolution d'un disque auto-gravitant dans une simulation SPH. On note l'apparition de fragments compacts dans le disque. Ils ont une masse comparable à la masse de Jupiter et survivent dans le disque pendant toute la durée de la simulation. Tiré de Mayer* et al. *(2004).*

Si elles ont le mérite de la simplicité, toutes les équations d'état mentionnées ci–dessus ne sont pas très réalistes. Récemment, certains auteurs (Pickett *et al.* , 2003; Rice *et al.* , 2003) ont tenté d'améliorer le traitement de la thermodynamique du disque en tenant compte de son refroidissement (causé par le rayonnement du disque). Même si la fonction de refroidissement est encore très simple, ces simulations ont permis de montrer que le disque évolue vers un état quasi–permanent dans lequel $Q \sim 1$. En effet, au cours de son évolution, le disque se refroidit constamment, entraînant une diminution de la valeur de Q, qui est proportionnel à la vitesse du son. Mais les chocs qui apparaissent dans les bras spiraux à cause de l'instabilité gravitationnelle ont l'effet inverse et contribuent à augmenter la température, jusqu'à atteindre un régime où chauffage et refroidissement se compensent. Ce scénario d'auto-régulation du disque avait déjà été suggéré par Paczynsky (1978) bien avant l'apparition des premières simulations numériques.

Notons pour finir que Rice *et al.* (2003) observent également l'apparition de fragments dans leur simulation lorsque le refroidissement est suffisamment rapide. Mais ce résultat n'est pas confirmé par les résultats de Pickett *et al.* (2003), ce qui montre encore une fois l'incertitude autour de cette question.

La problématique

Les deux paragraphes précédents ont montré que la turbulence MHD et les instabilités gravitationnelles sont deux mécanismes possibles du transport du moment cinétique dans les disques. D'un point de vue un peu plus formel, l'équation de conservation du moment cinétique montre même qu'elles sont sur un strict pied d'égalité. Dans un disque turbulent et massif, cette équation peut s'écrire, après une moyenne verticale et azimuthale (Balbus & Papaloizou, 1999) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \Sigma r^2 \Omega \rangle + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \Omega \Sigma \langle u_r \rangle + r^2 \Sigma W_{r\phi}\right) = 0 \tag{1.5}$$

où $\langle u_r \rangle$ est la moyenne de la vitesse radiale. $W_{r\phi}$ est le tenseur des contraintes, responsable du transport du moment cinétique. Si on note u_ϕ la partie non stationnaire de la vitesse orthoradiale v_ϕ (de telle sorte que $v_\phi = r\Omega + u_\phi$), $W_{r\phi}$ s'écrit :

$$W_{r\phi} = \langle u_r u_\phi - u_{Ar} u_{A\phi} + u_{Gr} u_{G\phi} \rangle \,. \tag{1.6}$$

Trois termes apparaissent dans cette relation. Le premier relie les fluctuations des vitesses radiales et azimuthales. C'est le tenseur de Reynolds. Le deuxième est le tenseur de Maxwell. Il associe les fluctuations de deux composantes de la vitesse d'Alvén, définie par la relation :

$$\boldsymbol{u_A} = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{4\pi\rho}} \,. \tag{1.7}$$

Ici, $\boldsymbol{B}$ est le champ magnétique. Le tenseur de Maxwell est le principal responsable du transport de moment cinétique dans les simulations numériques de disques magnétisés et turbulents. En particulier, son intensité moyenne domine largement celle du tenseur de Reynolds. Enfin, le troisième terme de la relation (1.6) est le tenseur gravitationnel, qui fait apparaître une vitesse $\boldsymbol{u_G}$:

$$\boldsymbol{u_G} = \frac{\boldsymbol{\nabla} \Phi_s}{\sqrt{4\pi G\rho}} \,, \tag{1.8}$$

où Φ_s est le potentiel gravitationnel dans le disque. Le tenseur gravitationnel est non nul lorsque des instabilités gravitationnelles asymétriques apparaissent dans le disque, car elles produisent des variations radiales et azimuthales du potentiel gravitationnel et exercent un couple sur la matière.

La relation (1.5) montre donc que la turbulence MHD et les instabilités gravitationnelles interviennent au même titre comme agent potentiel du transport de moment cinétique. Or, jusqu'ici, toutes les études numériques se sont concentrées exclusivement sur l'un de ces mécanismes, que ce soit par des simulations purement hydrodynamiques de disque massifs, ou par des simulations MHD de disques de faible masse excluant de fait l'apparition d'instabilités gravitationnelles. *L'objectif de cette thèse est de combler ce vide en étudiant l'effet simultané des deux instabilités sur l'évolution d'un disque d'accrétion massif et magnétisé.* En particulier, l'un des enjeux principaux est de savoir si les deux instabilités interagissent pendant leur phase non–linéaire, ou si elles évoluent indépendemment l'une de l'autre. Quel est l'effet de cette éventuelle interaction sur les propriétés de transport de moment cinétique ? Des planètes se forment–elles plus facilement dans un disque massif turbulent, ou au contraire la turbulence inhibe–t–elle toute fragmentation ?

Ce sont ces questions qui seront étudiées dans cette thèse. Notons qu'il s'agit d'un problème intrinsèquement tridimensionnel, qui nécessite d'inclure à la fois des effets magnétiques et gravitationnels. Il suppose donc de réaliser des simulations numériques lourdes, qui, même en utilisant les meilleures machines de calcul actuellement disponibles, restent forcément limitées dans leur réalisme et leur résolution.

Plan de la thèse

Le chapitre 2 présente les méthodes numériques que j'ai utilisées au cours de ma thèse. En particulier, la méthode de résolution de l'équation de Poisson est détaillée. En effet, le calcul du potentiel gravitationnel est le facteur limitant de ces simulations, car il est très coûteux en temps de calcul. Un soin particulier doit y être apporté. Dans le chapitre 3, je présente les études préliminaires 2D que j'ai réalisées. Elles permettent notamment d'appréhender les problèmes et sont une bonne façon d'étudier les propriétés de l'instabilité MRI dans un milieu auto–gravitant. La chapitre 4 est le coeur de cette thèse. Il décrit les résultats des simulations 3D, en s'intéressant tout particulièrement au couplage entre la turbulence MHD et les instabilités gravitationnelles. Enfin, dans le chapitre 5, je présente une étude portant sur la migration des planètes de masse terrestre dans un disque magnétisé.

Chapitre 2

Méthodes numériques

Sommaire

2.1 Généralités

2.1.1 Les équations MHD

Les équations qui régissent l'évolution des disques d'accrétion magnétisés sont les équations de la magnéto–hydrodynamique (MHD). De nombreuses hypothèses sont nécessaires pour les établir (Shu, 1992; Hawley & Stone, 1995), et il est important de les rappeler ici. En premier lieu, on suppose que le système est non–relativiste : les vitesses du fluide sont petites devant la vitesse de la lumière. Les équations MHD requièrent également que le gaz soit localement neutre. De plus, il faut que l'approximation fluide soit vérifiée. Cette dernière condition suppose en particulier que le rayon de giration des particules est petit devant les dimensions typiques du système. Lorsque ces hypothèses sont vérifiées (ce qui est bien le cas pour les disques d'accrétion), les équations peuvent s'écrire sous la forme suivante (en unité cgs) :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) &= 0\,, &(2.1)\\
\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right) &= -\boldsymbol{\nabla}P - \rho\boldsymbol{\nabla}\Phi + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\,, &(2.2)\\
\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\frac{e}{\rho}\right) &= -P\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\,, &(2.3)\\
\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v_e}\times\boldsymbol{B} - \eta\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\,, &(2.4)\\
\Delta\Phi_s &= 4\pi G\rho\,, &(2.5)
\end{aligned}
$$

où ρ est la densité de masse du fluide, e la densité d'énergie interne, $\boldsymbol{v}$ la vitesse des neutres et $\boldsymbol{v_e}$ la vitesse des électrons, P la pression, $\boldsymbol{B}$ le champ magnétique, η la résistivité et Φ le champ gravitationnel total, c'est à dire la somme du champ gravitationnel Φ_s produit par la distribution de masse elle–même et d'un champ gravitationnel extérieur Φ_{ext} (comme par exemple celui créé par l'étoile autour de laquelle tourne le disque).

La première équation ci–dessus traduit la conservation de la masse. La seconde est l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dans laquelle apparaît en particulier la force de Lorentz. La troisième décrit la conservation de la densité d'énergie interne. Notons ici qu'il est aussi possible d'écrire une équation pour l'énergie totale spécifique E :

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + e\,. \tag{2.6}$$

Le calcul de la pression peut s'avérer délicat numériquement dans le cas des écoulements rapides, car il faut pour cela retrancher l'énergie cinétique de l'énergie totale. Il arrive que les températures et les pressions obtenues soient négatives à cause des erreurs de troncations si E et $1/2\rho v^2$ sont du même ordre. La quatrième équation MHD est l'équation d'induction qui décrit l'évolution du champ magnétique. Dans la suite de cette thèse, on supposera toujours que la conductivité du milieu est infinie, ce qui entraîne $\eta = 0$ et $\boldsymbol{v_e} = \boldsymbol{v}$. On dit qu'on est dans l'approximation MHD idéale et l'équation d'induction s'écrit alors :

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\,. \tag{2.7}$$

La limite $\eta = 0$ est justifiée dans la majorité des systèmes astrophysiques. Cependant, on a déjà vu dans l'introduction que le cas des disques d'accrétion est encore controversé. Mais pour des raisons de faisabilité, on supposera malgré tout cette hypothèse justifiée dans la suite de cette thèse. Développer des modèles avec une conductivité finie sera une suite naturelle du travail présenté ici.

Enfin, l'absence de monopôles magnétiques entraîne la contrainte suivante, qui doit être satisfaite à tout instant dans une simulation MHD :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.8}$$

Notons que d'après l'équation d'induction 2.7, si cette condition est initialement satisfaite, alors elle le restera à tout instant. Mais ce résultat est *analytique* et ne s'applique pas à une simulation MHD. En effet, des erreurs numériques sont susceptibles de s'accumuler au cours du temps et de modifier de manière significative les résultats si le schéma numérique n'est pas choisi avec soin. **En conclusion, une méthode numérique assurant la préservation de la contrainte 2.8 (à la précision de la machine près) est cruciale dans toute simulation MHD.**

Pour finir, notons que la dernière équation MHD est l'équation de Poisson qui permet de calculer la valeur du potentiel gravitationnel Φ_s. Sa résolution numérique sera détaillée dans la suite.

2.1.2 Les différentes méthodes numériques

Avec la sophistication accrue des modèles astrophysiques théoriques et la croissance importante des moyens informatiques de calculs de ces dernières années, de nombreuses méthodes numériques ont été développées et il est impossible d'en donner ici une description exhaustive. Je m'attacherai seulement à faire un rapide état des lieux des techniques les plus prometteuses ou les plus utilisées. Elles sont toujours l'objet de nombreux travaux à l'heure actuelle, en particulier en ce qui concerne les problèmes MHD. Enfin, il est important de garder à l'esprit que toute technique numérique a des avantages et des inconvénients et que le choix particulier d'une méthode est avant tout dicté par le problème physique que l'on veut résoudre. *La solution parfaite qui convient pour tout problème n'existe pas.*

Une première approche pour résoudre les équations présentées plus haut consiste à en avoir une vision Lagrangienne. C'est ce qui a conduit Gingold & Monaghan (1977) et Lucy (1977) à développer la technique dite *"Smoothed Particle Hydrodynamics"* (SPH) dans laquelle on suit directement le mouvement de particules fluides. Cette technique est bien adaptée aux simulations à plusieurs dimensions et s'affranchit de tous les problèmes de conditions de bord rencontrés par les codes sur grille. En revanche, il n'y a pas d'algorithme satisfaisant pour inclure les champs magnétiques dans les simulations SPH à ce jour , même si des travaux récents (Price & Monaghan, 2004a,b) montrent que les recherches dans ce domaine sont toujours en cours.

Une deuxième possibilité est d'avoir une vision Eulérienne du problème. Dans ce cas, on discrétise les variables fondamentales (densité, pression,...) sur une grille superposée au système physique étudié. Deux approches ont vu le jour : les méthodes dites de différences finies et les méthodes de type Godunov. Dans le premier cas, qui sera présenté plus en détail dans la suite de ce chapitre, les dérivés sont simplement évaluées en calculant des différences entre les valeurs des variables dans deux cellules voisines. Dans le second cas, on réécrit d'abord les équations sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x_i} = 0 \tag{2.9}$$

où U est un vecteur regroupant les variables fondamentales du problème, $F(U)$ une matrice de flux (flux de masse, de moment cinétique,...), et les x_i représentent les différentes directions de l'espace. Les méthodes de type Godunov tentent de calculer une valeur approchée de ces flux en résolvant un problème de Riemann à l'interface de chaque cellule. Les états droite et gauche du problème de Riemann sont calculés grâce à une étape de tracé de caractéristiques. Ces méthodes ont eu un succès considérable pour l'étude de nombreux problèmes hydrodynamiques, notamment en raison de leur bons résultats dans la description des chocs, très fréquents dans les problèmes astrophysiques. On trouvera une remarquable description de ce type de méthodes dans le livre de Toro (1997). Étant donné son succès, de nombreux auteurs ont tenté d'étendre cette technique à la MHD. Cependant, des problèmes importants restent à résoudre, liés notamment au fait qu'il n'existe pas de solution exacte au problème de Riemann MHD, et également à la difficulté de satisfaire la contrainte 2.8. Certains codes, tels *FLASH* (Fryxell *et al.* , soumis) ou *VAC* (Tóth, 1996) sont déjà disponibles, mais de nombreux tests sont encore nécessaires pour comprendre vraiment les forces et les faiblesses de ces algorithmes. J'ai commencé à travailler sur ce type de code au cours de ma thèse en collaboration avec Romain Teyssier (CEA), Emmanuel Dormy (IPGP) et Stéphane Colombi (IAP). Les résultats préliminaires et les perspectives de ce travail sont présentés dans l'appendice B.

Contrairement aux codes de type Godunov, la méthode des différences finies a été testée de manière intensive en MHD depuis l'apparition du code *ZEUS-2D* (Stone & Norman, 1992a,b; Stone *et al.* , 1992) au début des années 1990. Ce code a été appliqué à de nombreux problèmes astrophysiques différents, en particulier dans le cadre de l'étude de la physique des disques d'accrétion. Pour ces raisons de grande fiabilité, c'est ce code, ainsi que son équivalent tridimensionnel *GLOBAL* (Hawley & Stone, 1995), qui seront utilisés dans cette thèse.

2.2 La méthode des différences finies

Dans cette partie, je vais détailler les algorithmes utilisés par les codes *ZEUS-2D* et *GLOBAL*. *ZEUS-2D* est un code public qui est accessible sur Internet à l'adresse `http://zeus.ncsa.uiuc.edu:8080/lca_intro_zeus2d.html`. Il est très modulaire et comporte en particulier une partie traitant les problèmes de transfert radiatif. Cette partie n'a pas été utilisée dans cette thèse et je ne la décrirai donc pas. *ZEUS-2D* est écrit dans un formalisme covariant qui permet d'utiliser au choix une géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Pour le travail présenté ici, j'ai utilisé le système de coordonnées cylindriques bien adapté à l'étude de la physique des disques d'accrétion. On verra dans la suite que ce choix a des implications pour le calcul du potentiel gravitationnel. C'est également dans ce système de coordonnées que le code *GLOBAL* a été écrit, et je me placerai donc dans un repère cylindrique $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z})$ dans la suite.

Les équations qui sont effectivement résolues par *ZEUS-2D* et *GLOBAL* sont modifiées par rapport à celles décrites dans la section 2.1.1. Par exemple, la conservation de la composante radiale de l'impulsion $S_r = \rho v_r$ est mise sous la forme :

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(S_r \boldsymbol{v}) = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})B_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,, \tag{2.10}$$

où B_r dénote la composante radiale du champ magnétique. Dans cette équation, les termes dus à la force gravitationnelle, au gradient de pression et à la force de Lorentz sont traités comme des termes sources, tandis que le terme $\boldsymbol{\nabla}\cdot(S_r \boldsymbol{v})$ représente l'advection de S_r par l'écoulement. De même, l'équation de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(e\boldsymbol{v}) = -(P+Q)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\,. \tag{2.11}$$

Ici, Q est une viscosité artificielle qui permet de traiter correctement les processus dissipatifs dans les chocs (von Neumann & Richtmyer, 1950).

2.2.1 Les algorithmes hydrodynamiques

Discrétisation des variables

Il est important avant toute chose de présenter la grille utilisée dans *ZEUS-2D* et *GLOBAL*. Elle est reproduite sur la figure 2.1 (*partie gauche*) où seules 2 dimensions sont représentées pour simplifier la discussion. Il s'agit en fait de deux grilles décalées, appelées "grilles a" et "grille b". Les coordonnées de la "grille a" sont celles des faces des cellules composant le domaine de calcul, tandis que la "grille b" décrit la position des centres des cellules. On utilise ces deux grilles car les variables physiques sont positionnées de manière différente suivant leur nature : les grandeurs scalaires sont situées au centre des cellules, donc sur la "grille b", tandis que les variables vectorielles sont situées sur la "grille a" (c'est en particulier le cas du champ magnétique, comme l'illustre plus loin la figure 2.3). Le bord de la grille comporte une rangée de 2 cellules, dites "fantômes", qui contiennent les informations concernant les conditions de bord et dont l'évolution temporelle n'est pas calculée. Notons ici que les variables physiques sont également discrétisées temporellement. Si n est le nombre de pas de temps depuis l'instant initial, on utilisera dans la suite la convention usuelle qui consiste à faire apparaître la position spatiale en indice et la position temporelle en exposant pour représenter la valeur d'une grandeur discrétisée. Par exemple, on obtient pour la pression :

$$P(r = r_i, \phi = \phi_j, z = z_k, t) = P^n_{i,j,k} \tag{2.12}$$

Le positionnement un peu surprenant des variables sur la grille présentée ci–dessus permet de calculer naturellement des dérivées centrées. Par exemple, on calculera un gradient de pression en utilisant la formule :

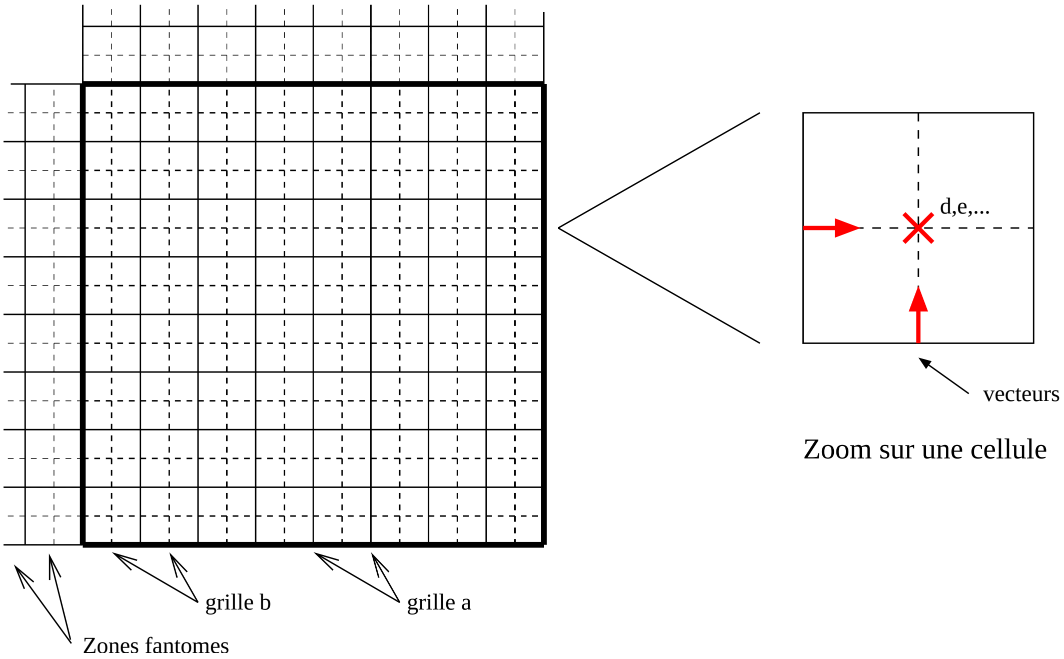

FIG. 2.1 – *La partie gauche de la figure montre la grille utilisée dans ZEUS-2D et GLOBAL. Les coordonnées de la "grille b" correspondent aux centres des cellules tandis que celles de la "grille a" décrivent la position des faces des cellules. Des zones supplémentaires appelées zones fantômes sont ajoutées à chaque bord de grille. Elles servent pour la description des conditions aux limites. La partie droite de la figure montre la position des variables dans une cellule. Les grandeurs scalaires sont situées au centre de la cellule et les grandeurs vectorielles sur les faces.*

$$\left(\frac{dP}{dr}\right)_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta r} \tag{2.13}$$

où Δr est la taille d'une cellule dans la direction radiale. Cette dérivé est naturellement centrée sur la face qui sépare les cellules d'indices $i-1$ et i. Or, c'est précisément l'endroit où est défini la grandeur S_r qui intervient dans l'équation de conservation de l'impulsion, ce qui permet un calcul plus précis de la variation de S_r.

Algorithmes utilisés pour la partie hydrodynamique

Pour résoudre la partie hydrodynamique des équations, le code évalue les variables fondamentales à l'instant $t+dt$ connaissant leur valeur à l'instant t (on verra dans la suite comment ce pas de temps dt est calculé). Il utilise pour cela une méthode explicite après avoir divisé le problème global en sous–parties plus simples à traiter. Par exemple, si l'équation d'évolution peut se mettre sous la forme :

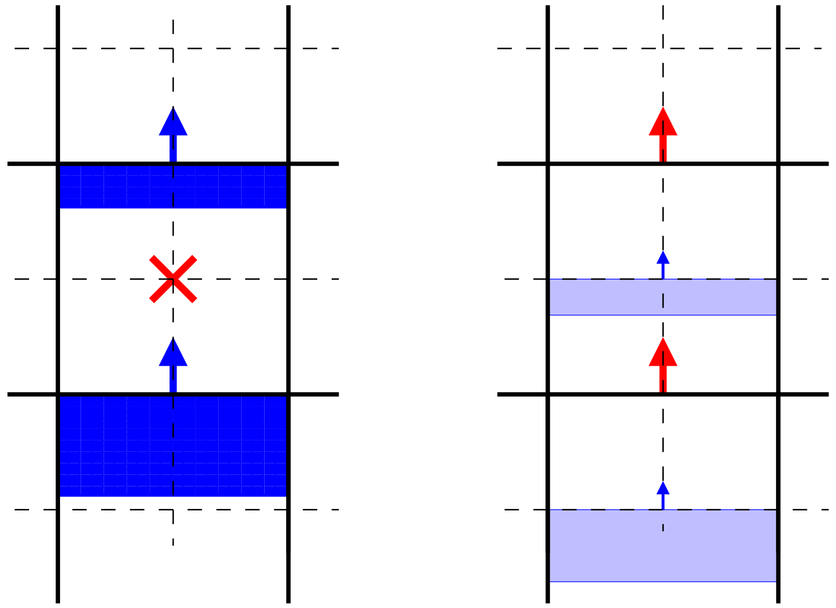

FIG. 2.2 – *Illustration de l'algorithme utilisé dans le traitement de la partie transport des équations hydrodynamiques. La partie de gauche de la figure illustre le transport des quantités scalaires, comme la masse. La partie de droite fait référence au transport des quantités vectorielles.*

$$\frac{dy}{dt} = L(y) = L_1(y) + L_2(y)\,, \tag{2.14}$$

où L, $L1$ et $L2$ sont des opérateurs, alors on sépare le pas de temps en deux sous-pas et on a :

$$\frac{y^{n+\alpha} - y^n}{dt} = L_1(y^n) \tag{2.15}$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+\alpha}}{dt} = L_2(y^{n+\alpha})\,, \tag{2.16}$$

où l'exposant $n+\alpha$ note un "état intermédiaire" entre t et $t+dt$. En pratique, dans le cas des équations hydrodynamiques, on traite de manière séparée les termes sources des équations (gradient de pression, accélération gravitationnelle,...) et les termes de transport pour lesquels on applique un traitement différent (voir ci–dessous). Par exemple, pour calculer la contribution du gradient de pression à la modification de la composante radiale de l'impulsion, on écrira simplement :

$$\frac{S^{n+\alpha}_{i,j,k} - S^n_{i,j,k}}{dt} = -\frac{P^n_{i,j,k} - P^n_{i-1,j,k}}{\Delta r}\,. \tag{2.17}$$

La contribution des autres termes sources est évaluée de manière similaire.

Le traitement de la partie transport des équations est un peu différent. Il est illustré sur la figure 2.2. Le principe consiste à calculer la quantité de chacune des variables qui pénètre dans chaque cellule en évaluant des flux de masse, énergie, impulsion, moment cinétique à chaque interface entre deux cellules. Par exemple, sur la partie gauche de la figure 2.2 qui illustre le cas d'une grandeur scalaire (supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse de la densité de masse), les zones bleues correspondent à la quantité de masse entrant par le bas de la cellule et sortant par le haut pendant l'intervalle de temps dt. Sur la partie droite est représenté le cas d'une grandeur vectorielle, comme par exemple l'impulsion. Il est un peu différent car cette variable est localisée sur les faces des cellules. Les flux d'impulsion entrants et sortants sont donc calculés dans ce cas à l'interface représentée en pointillés sur le schéma. Ils sont représentés par les surfaces bleues claires.

Bien entendu, toute la difficulté de cette étape consiste à évaluer correctement ces flux. Il a été constaté en particulier qu'une simple moyenne de la densité sur les faces des cellules conduit à une mauvaise évaluation des flux de masse qui peut entraîner l'apparition d'instabilités numériques. *ZEUS-2D* et *GLOBAL* utilisent une méthode d'interpolation due à van Leer (1977) qui garantit la stabilité de l'écoulement. Son principe, dont la description détaillée sort du cadre de cette thèse, consiste à tenir compte du sens de l'écoulement du fluide dans le processus d'interpolation.

Calcul du pas de temps

Le fait d'utiliser une méthode explicite entraîne une limite supérieure sur le pas de temps dt sous peine de voir apparaître des instabilités dans l'écoulement. À chaque itération, on peut le calculer précisément par la méthode de von Neumann (Press *et al.* , 1986). Physiquement, cette condition, dite condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), empêche toute information (transportée par des ondes ou advectée par le fluide) de parcourir une distance supérieure à la taille d'une cellule pendant un pas de temps. *ZEUS-2D* et *GLOBAL* tiennent compte de cette contrainte et le pas de temps s'ajuste à chaque itération aux propriétés de l'écoulement.

2.2.2 Le traitement du champ magnétique

Ce qui précède concerne les algorithmes qui sont appliqués à la partie hydrodynamique des équations. La dynamique particulière du champ magnétique introduit des problèmes spécifiques qui sont maintenant brièvement abordés. Ceux-ci sont essentiellement dus à la nécessité de maintenir la divergence du champ aussi petite que possible (c'est à dire à la précision de la machine près) et à l'apparition de nouvelles classes d'ondes, en particulier les ondes d'Alfvén. Notons tout d'abord qu'il faut en particulier tenir compte de ces nouvelles ondes dans le calcul de la condition CFL.

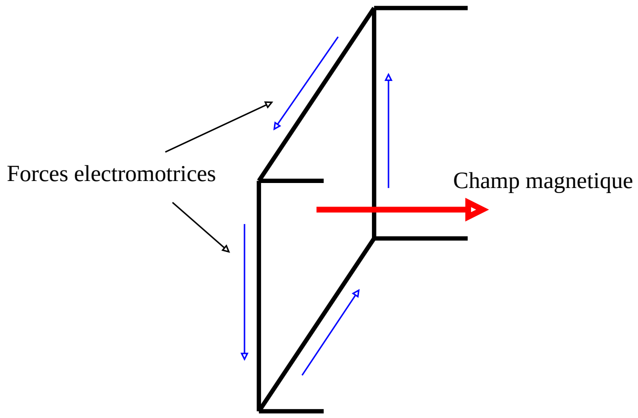

FIG. 2.3 – *Illustration de la méthode du transport contraint. Le champ magnétique est représenté sur la face d'une cellule. Pour calculer son évolution temporelle, on calcule la circulation des forces électromotrices ($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$) autour de cette face.*

Le transport contraint

Le problème de la conservation de la divergence nulle du champ magnétique lors d'une simulation a reçu une attention considérable. Une des possibilités est de remplacer l'équation d'induction par une équation sur le potentiel vecteur $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$. Cependant, cette méthode introduit des dérivés spatiales d'ordre 3 dans les équations, difficiles à calculer numériquement de manière précise. Une solution plus satisfaisante a été développée par Evans & Hawley (1988). C'est la méthode dite du transport contraint (CT pour *"Constrained Transport"* en anglais). Elle consiste à réécrire l'équation d'induction (2.7) sous forme intégrale :

$$\frac{\partial \Psi_S}{\partial t} = \oint (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{dl} \tag{2.18}$$

où Ψ_S est le flux de $\boldsymbol{B}$ à travers la surface sur le contour de laquelle on calcule l'intégrale du second membre, obtenue en utilisant le théorème de Stokes. Cette nouvelle vision de l'équation d'induction est représentée graphiquement sur la figure 2.3. Elle montre que le calcul de la variation du champ magnétique passe par l'évaluation de la circulation des forces électromotrices $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, représentées en bleu sur la figure 2.3, sur les arêtes des cellules. Ainsi, si on intègre numériquement l'équation (2.18) sur l'ensemble du volume de la simulation, les forces électromotrices s'annulent deux à deux, ce qui assure la conservation de la divergence au cours de la simulation. Bien sûr, il faut avoir $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ au début de la simulation, mais cette dernière condition est suffisante pour assurer que la contrainte (2.8) reste satisfaite à tout instant si on utilise le formalisme CT.

La méthode des caractéristiques

À ce stade, il reste à déterminer les valeurs des forces électromotrices utilisées dans la méthode CT. Il s'est avéré (Stone & Norman, 1992b) qu'une simple interpolation des valeurs du champ magnétique et de la vitesse sur les arêtes des cellules conduit à l'apparition d'instabilités, en particulier dans le calcul de la propagation des ondes d'Alfvén. Stone & Norman (1992b) ont donc extrapolé ces variables le long des caractéristiques qui leur sont associées. Cette procédure a permis de supprimer les instabilités mentionnées ci-dessus et conduit alors à une bonne description de la propagation des ondes d'Alfvén. On trouvera une description détaillée de cette méthode dans l'article de Hawley & Stone (1995).

2.3 Résolution numérique de l'équation de Poisson

Au début de ma thèse, *ZEUS-2D* et *GLOBAL* ne contenaient pas de module permettant de résoudre l'équation de Poisson dans une géométrie cylindrique. La partie auto-gravité incluse dans la version publique de *ZEUS-2D* était plutôt dédiée à des études dans des systèmes de coordonnées sphériques. J'ai donc entrepris d'ajouter un module qui soit bien adapté à l'étude des disques d'accrétion. Dans cette partie, je présente en détail la méthode que j'ai utilisée.

2.3.1 Méthode

Le calcul du potentiel gravitationnel passe par la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi_s = 4\pi G\rho \,. \tag{2.19}$$

On peut montrer (Jackson, 1975) que cette équation admet une solution unique sur un domaine borné de l'espace si on fixe la valeur du potentiel sur le bord de ce domaine (on parle alors de condition de Dirichlet) ou la valeur de sa dérivé normale à la surface (condition de Neumann). Cette condition de bord apporte une information sur la distribution de matière en dehors du domaine (comme par exemple une condition de symétrie dans le cas des conditions de Neumann). Au cours des simulations présentées dans cette thèse, nous supposerons toujours qu'il n'y a pas de matière en dehors du domaine de calcul. Cette hypothèse permet de calculer Φ_s sur le bord de la grille, puis de résoudre l'équation (2.19) à l'intérieur du domaine (on se placera donc dans le cas des conditions de bord de type Dirichlet).

Calcul du potentiel sur les bords du domaine

En général, Φ_s peut s'écrire sous forme intégrale (Jackson, 1975) :

$$\Phi_s(\boldsymbol{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}d\tau' \tag{2.20}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le vecteur position, $d\tau' = r'dr'd\phi'dz'$ est l'élément de volume élémentaire en coordonnées cylindriques et l'intégrale porte sur l'ensemble du volume de calcul. Un développement de cette formule en harmoniques sphériques a été utilisé par de nombreux auteurs dans les deux dernières décennies pour le calcul pratique de Φ_s. C'est en particulier le cas dans la version publique de *ZEUS-2D* (Stone & Norman, 1992a), ainsi que dans de nombreuses simulations de disques massifs (Tohline & Hachisu, 1990; Pickett *et al.* , 1996; Boss, 1998). Or, si ce développement est bien adapté à une géométrie sphérique dont les harmoniques sphériques forment une base naturelle, il est beaucoup moins performant dans le cas des coordonnées cylindriques généralement utilisées dans les simulations numériques de disques (Villumsen, 1985). Partant de ce constat, Cohl & Tohline (1999) ont montré récemment qu'il existe un développement bien mieux adapté à la géométrie cylindrique qui s'écrit en termes de fonctions de Legendre :

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{1}{\pi\sqrt{rr'}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')}Q_{m-1/2}(\chi)\,, \tag{2.21}$$

où m est un entier et la fonction de Legendre demi–entière de seconde espèce $Q_{m-1/2}$ dépend de l'argument χ qui est une fonction de la position :

$$\chi = \frac{r^2 + r'^2 + (z-z')^2}{2rr'}\,. \tag{2.22}$$

Les fonctions $Q_{m-1/2}(\chi)$ peuvent être obtenues itérativement grâce à une relation de récurrence. On trouvera dans l'appendice C une description détaillée de l'algorithme utilisé pour les calculer. La relation (2.21) permet d'exprimer le potentiel gravitationnel sous la forme :

$$\Phi_s(r,\phi,z) = -\frac{G}{\pi\sqrt{r}}\int_V d\tau \frac{\rho(r',\phi',z')}{\sqrt{r'}}\sum_{m=0}^{+\infty}\epsilon_m \cos\left[m(\phi-\phi')\right]Q_{m-1/2}(\chi)\,. \tag{2.23}$$

Dans cette relation, $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_m = 2$, $\forall\, m > 0$. En pratique, on tronque la somme sur m à une valeur maximum m_{max}. L'intérêt de cette relation est que les fonctions de Legendre ne sont calculées qu'une seule fois, au début de la simulation, et stockées ensuite en mémoire. De plus une seule somme intervient sous le signe intégrale, et non une double somme comme dans le cas des harmoniques sphériques. Cohl & Tohline (1999) ont présenté une série de tests pour démontrer la grande précision obtenue en utilisant la relation (2.23). Les résultats de ces tests, que j'ai reproduits avec *GLOBAL*, sont présentés dans la suite de ce chapitre. Enfin, dans le cas particulier des simulations à symétrie cylindrique réalisées avec *ZEUS-2D*, seule la composante $m = 0$ du potentiel est retenue, et on aboutit à une formule extrêmement facile à utiliser dans une simulation numérique, puisque c'est une simple intégrale portant sur la densité de masse :

$$\Phi_s(r,z) = -\frac{2G}{\sqrt{r}} \int dr'dz' \sqrt{r'} \rho(r',z') \chi K(\chi) \, . \tag{2.24}$$

Ici $K(\chi)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce (Abramowitz & Stegun, 1965). Dans les simulations numériques présentées dans cette thèse, j'ai utilisé les relations (2.23) et (2.24) pour calculer le potentiel gravitationnel sur les bords de la grille, respectivement dans les cas 3D et 2D.

Calcul du potentiel sur l'ensemble du domaine

Pour résoudre l'équation de Poisson sur l'ensemble du domaine de calcul, j'ai utilisé une méthode itérative appelée SOR (*"Succesive Over-Relaxation"* en anglais). Pourquoi utiliser une méthode itérative et pas une généralisation de la forme intégrale précédente ? La philosophie d'une méthode itérative est d'approcher petit à petit la solution en partant d'une approximation aussi bonne que possible du résultat. Or, dans une simulation numérique, Φ_s varie peu entre chaque pas de temps. On peut donc s'attendre à atteindre une bonne précision avec un nombre peu important d'itérations, et donc à obtenir la solution plus rapidement que si on utilisait la forme intégrale de l'équation de Poisson.

La méthode SOR repose sur la discrétisation de l'équation de Poisson. Étudions d'abord le problème à 2D. Dans un repère cylindrique à deux dimensions (r, z), l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi_s}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2} = 4\pi G\rho \, . \tag{2.25}$$

La discrétisation du second terme du membre de gauche donne par exemple, dans le cas d'une grille uniforme :

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2}\right]_{i,k} = \frac{\Phi_{s_{i,k-1}} - 2\Phi_{s_{i,k}} + \Phi_{s_{i,k+1}}}{(\Delta z)^2} \, , \tag{2.26}$$

où on a noté Δz la taille d'une cellule dans la direction verticale. De façon générale, on peut mettre l'équation (2.25) sous la forme :

$$a\Phi_{s_{i-1,k}} + b\Phi_{s_{i+1,k}} + c\Phi_{s_{i,k}} + d\Phi_{s_{i,k-1}} + e\Phi_{s_{i,k+1}} = 4\pi G\rho_{i,k} \, . \tag{2.27}$$

Les divers coefficients qui apparaissent dans cette relation valent :

$$a \;=\; \frac{r_a(i)}{\Delta r\, \Delta(r^2/2)} \, , \; b = \frac{r_a(i+1)}{\Delta r\, \Delta(r^2/2)}$$

$$\begin{aligned} c &= -\left(\frac{2r_b(i)}{\Delta r\,\Delta(r^2/2)} + \frac{2}{(\Delta z)^2}\right) \\ d &= e = \frac{1}{(\Delta z)^2} \end{aligned}$$

où $r_a(i)$ et $r_b(i)$ représentent respectivement les coordonnées des grilles "a" et "b" et $\Delta(r^2/2) = (r_a^2(i+1) - r_a^2(i))/2$. On a pris soin de régulariser en $r = 0$ les opérateurs de dérivation qui interviennent dans l'équation de Poisson (Stone & Norman, 1992a).

A priori, au début de l'exécution de la partie du code qui calcule le potentiel gravitationnel, l'équation (2.27) n'est pas vérifiée. Le principe de la méthode itérative est de résoudre cette équation pour $\Phi_{s_{i,k}}$. On réalise cette opération pour chaque cellule de la grille et on obtient donc une nouvelle valeur du potentiel gravitationnel en chaque point. Pour les cellules situées au bord de la grille, on utilise les valeurs de Φ_s calculées grâce à la formule (2.23). En itérant ce processus (d'où le nom de ce type de méthode), on fait progressivement converger la fonction $\Phi_{s_{i,k}}$ converge vers la valeur correcte du potentiel. Malheureusement, cet algorithme, dit de Gauss-Seidel, n'est pas utilisable en pratique car sa convergence est beaucoup trop lente et donne lieu à des temps de calcul prohibitifs (Press *et al.* , 1986). Pour accélérer la convergence, on utilise la méthode suivante : si $\Phi^{old}_{s_{i,k}}$ est la valeur du potentiel au début d'une itération et $\Phi^*_{s_{i,k}}$ la solution de l'équation (2.27), alors on prend comme nouvelle valeur du potentiel pour l'itération suivante la quantité $\Phi^{new}_{s_{i,k}}$ définie par :

$$\Phi^{new}_{s_{i,k}} = \omega \Phi^*_{s_{i,k}} + (1-\omega)\Phi^{old}_{s_{i,k}} \tag{2.28}$$

où ω est le paramètre de "sur-relaxation" qui donne son nom à cette méthode. Le choix de sa valeur est crucial pour obtenir une accélération appréciable de la convergence. Une expression optimale est donnée par Press *et al.* (1986) pour le calculer :

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2_{Jacobi}}}\,, \tag{2.29}$$

avec, pour une grille de résolution (N_r, N_z) :

$$\rho_{Jacobi} = \frac{\cos\frac{\pi}{N_r} + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2 \cos\frac{\pi}{N_z}}{1 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2}\,. \tag{2.30}$$

Enfin, à chaque itération, on évalue la qualité de la solution obtenue en calculant une estimation de l'erreur $\|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho\|$ grâce à la relation :

$$\|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho\| = \max\,|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho|_{i,k}\,, \tag{2.31}$$

où le maximum est pris sur l'ensemble de la grille. On estime avoir obtenu une bonne précision lorsque

$$\|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho\| \leq \epsilon\|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho\|_0 \,, \tag{2.32}$$

où $\|\Delta\Phi_s - 4\pi G\rho\|_0$ est l'erreur au début de la procédure itérative. En pratique, j'ai utilisé $\epsilon = 10^{-6}$ dans les simulations qui sont présentées dans la suite.

Si nécessaire, la méthode SOR se généralise facilement à 3 dimensions. Cependant, j'ai trouvé que cela n'était pas la meilleure stratégie dans notre cas. En effet, puisque c'est une méthode qui fait intervenir seulement les plus proches voisins d'une cellule à chaque itération, elle est efficace pour supprimer les erreurs du potentiel à petite échelle, mais beaucoup moins pour en corriger les erreurs à grande échelle. Or, dans le cas de l'apparition d'instabilités gravitationnelles dans un disque massif, nous sommes intéressés par la croissance de structures de grandes longueurs d'onde dans la direction azimutale, et initialement de faible amplitude. La méthode SOR n'est probablement pas adaptée à la description de ce type d'instabilité. En effet, elle privilégie l'émergence de modes de la taille de la grille dans la direction ϕ puisque c'est à cette échelle que les erreurs sont les plus importantes. J'ai donc décidé d'utiliser une transformation de Fourier dans la direction orthoradiale. L'équation de Poisson est alors réduite à un problème bidimensionnel pour chaque composante de Fourier du potentiel Φ_{sm} :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_{sm}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\Phi_{sm} + \frac{\partial^2\Phi_{sm}}{\partial z^2} = 4\pi G\rho_m \,, \tag{2.33}$$

dans lequel Φ_{sm} est défini par la relation :

$$\Phi_{sm}(r_i, z_k) = \sum_{j=1}^{N_\phi} \Phi_s(r_i, \phi_j, z_k)e^{im\phi_j} \,, \tag{2.34}$$

où N_ϕ est le nombre de zones de la grille dans la direction orthoradiale. ρ_m est défini par une relation similaire à partir de la densité de masse. La méthode SOR s'adapte aisément à la résolution de l'équation (2.33) et on en déduit Φ_s par transformée de Fourier inverse une fois que les coefficients Φ_{sm} sont déterminés.

En résumé, la méthode complète consiste à calculer Φ_s sur les bords du domaine grâce à la relation (2.23), puis à résoudre l'équation (2.33) par la méthode SOR pour chaque valeur de $m \in [0, m_{max}]$ et enfin à reconstruire le potentiel gravitationnel sur toute la grille par une transformée de Fourier inverse.

2.3.2 Tests

Dans le but de valider la méthode décrite précédemment, je présente dans cette partie une série de tests dans lesquels je résouds numériquement l'équation de Poisson avec la méthode décrite ci–dessus. Pour chaque système considéré, l'expression analy-

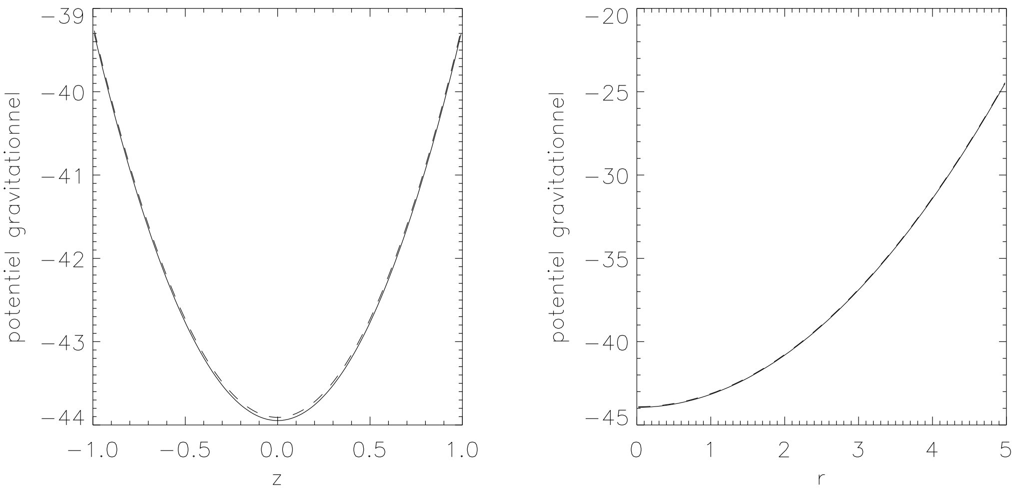

Fig. 2.4 – *La figure de gauche montre la comparaison entre la valeur numérique du potentiel gravitationnel créé par un sphéroïde de révolution autour de l'axe de symétrie du système (courbe en trait plein) et sa valeur analytique (courbe en tirets). La partie droite de la figure montre la variation du potentiel dans le plan équatorial du système. On y compare également les résultats numériques et analytiques.*

tique du potentiel est connue, ce qui permet de quantifier le degré d'approximation de la méthode numérique.

J'ai d'abord calculé le potentiel gravitationnel d'un sphéroïde de révolution dont la densité est définie par la relation :

$$\rho(r,\phi,z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r^2/a_1^2 + z^2/a_3^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } r^2/a_1^2 + z^2/a_3^2 > 1 \end{cases} \tag{2.35}$$

Ce test est présenté également par Cohl & Tohline (1999) et j'ai donc adopté les mêmes paramètres que ces auteurs : $a_1 = 5$, $a_3 = 1$ et $\rho_0 = 1$, ce qui correspond à un sphéroïde de révolution homogène et de forme aplatie. Une expression analytique du champ gravitationnel qu'il crée est donnée par Binney & Tremaine (1987). Comme la symétrie cylindrique est conservée dans ce système, il suffit de prendre $m_{max} = 0$. Les résultats sont présentés sur la figure 2.4. La partie gauche montre en trait plein le profil vertical du potentiel en $r = 0$ calculé numériquement ainsi que le résultat analytique en traits pointillés. Le calcul numérique a été effectué sur une grille pour laquelle $N_r = N_\phi = 128$. Sur la partie droite de la figure, j'ai représenté avec les mêmes conventions le profil radial de Φ_s dans le plan équatorial. On remarque à chaque fois que les solutions analytiques et numériques sont très proches. L'erreur relative est inférieure à 0.2% dans les deux cas.

Le deuxième test est le calcul du potentiel gravitationnel créé par un ellipsoïde dont

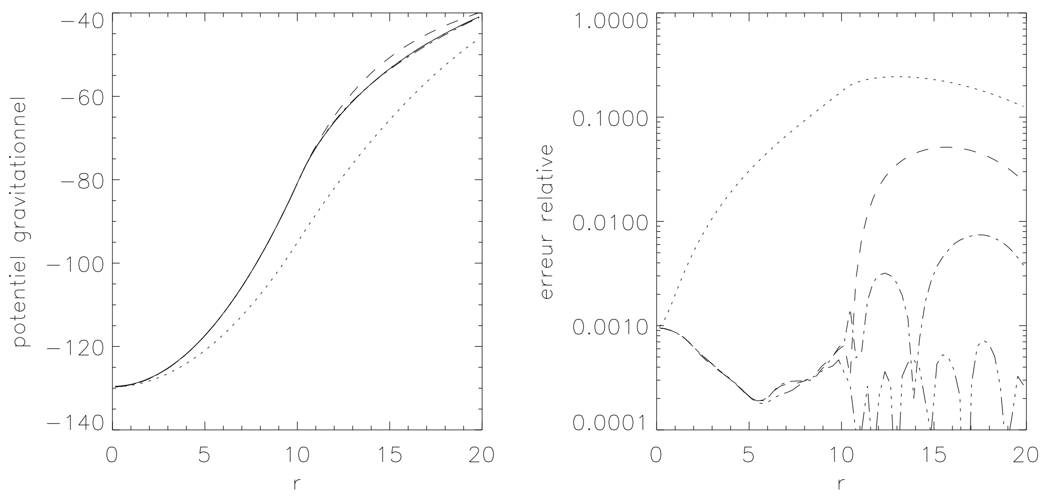

Fig. 2.5 – *Potentiel gravitationnel dans le plan équatorial de l'éllipsoïde dans la direction $\phi = \pi/2$. La figure de gauche montre la courbe analytique en trait plein, et les différentes valeurs numériques obtenues lorsque $m_{max} = 0$ (courbe en pointillés), $m_{max} = 2$ (courbe en tirets), $m_{max} = 4$ (points–tirets) et $m_{max} = 16$ (points–points–tirets). Les valeurs absolues des erreurs relatives obtenues dans chaque cas sont représentées sur la figure de droite.*

les axes dans les directions $\phi = 0$ et $\phi = \pi/2$ n'ont pas la même longueur. Cette fois, le but est de tester le calcul de la partie asymétrique du potentiel. La distribution de densité de masse dans un repère cartésien (x, y, z) s'écrit :

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } x^2/a_1^2 + y^2/a_2^2 + z^2/a_3^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2/a_1^2 + y^2/a_2^2 + z^2/a_3^2 > 1 \end{cases} \tag{2.36}$$

Toujours en référence à Cohl & Tohline (1999), j'ai utilisé $a_1 = 20$, $a_2 = 10$, $a_3 = 1$ et $\rho_0 = 1$. Comme cette structure ne présente pas de symétrie autour de l'axe $r = 0$, $\Phi_{sm} \neq 0 \; \forall m$ et ce test est donc utile pour avoir une idée du nombre de modes de Fourier nécessaires pour un calcul précis du potentiel. J'ai calculé numériquement celui–ci sur une grille comportant 64 zones dans les trois directions de l'espace et avec $m_{max} = 0, 2, 4$ ou 16. La figure 2.5 fait la synthèse de cette analyse. La partie gauche montre la variation du potentiel dans le plan équatorial de l'éllipsoïde dans la direction $\phi = \pi/2$. La courbe en trait plein est la fonction analytique (Binney & Tremaine, 1987), celle en traits pointillés correspond à $m_{max} = 0$ et en traits tirets à $m_{max} = 2$. Pour les valeurs supérieures de m_{max}, les courbes analytiques et théoriques sont quasiment confondues. L'erreur relative est représentée dans chaque cas sur la partie droite de la figure. Pour $m_{max} = 16$ (*points–points–tirets*), elle est inférieure à 0.1% et déjà plus petite que 1% si $m_{max} = 4$ (*points–tirets*). Ainsi, la méthode décrite dans les pages précédentes permet d'obtenir une valeur précise du potentiel même en incluant seulement un faible nombre de coefficients de Fourier.

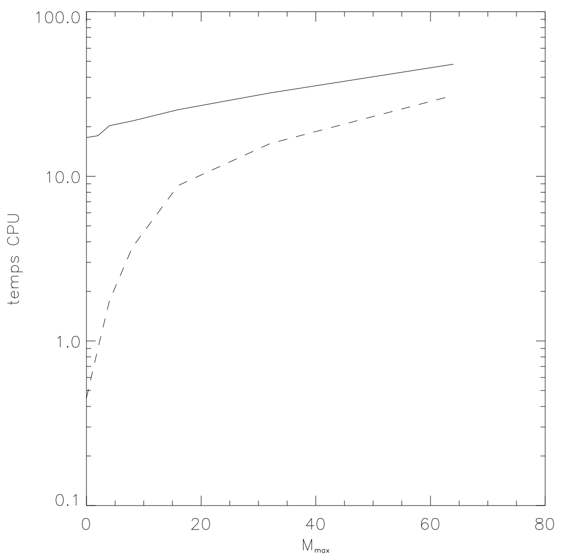

FIG. 2.6 – *La courbe en trait plein représente le temps CPU requis par pas de temps en fonction du nombre de modes de Fourier m_{max} inclus dans le calcul du potentiel gravitationnel. La courbe en pointillés montre le temps nécessaire pour résoudre l'équation de Poisson. Lorsque m_{max} dépasse 32, plus de la moitié du temps de calcul est utilisé pour le calcul de Φ_s. La résolution de la simulation est* $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 128, 128)$.

Enfin, il est important de noter que la résolution de l'équation de Poisson reste très coûteuse en temps de calcul malgré l'algorithme utilisé ici. Cela est en particulier illustré par la figure 2.6. Cette dernière compare les temps CPU requis pour que le code avance d'un pas de temps (*courbe en trait plein*) et pour la résolution de l'équation de Poisson (*courbe en tirets*) en fonction du nombre de coefficients de Fourier m_{max}, pour une résolution $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 128, 128)$. La courbe en traits tirets montre des valeurs qui sont négligeables devant celles de la courbe en trait plein pour les faibles valeurs de m_{max}, mais le temps de calcul de Φ_s devient vite important quand le nombre de modes de Fourier augmente. Lorsque $m_{max} \geq 32$, plus de la moitié du temps CPU est utilisé pour résoudre l'équation de Poisson à chaque pas de temps. Cette contrainte est une limite très sérieuse pour les simulations 3D qui seront présentées dans la suite.

2.4 Parallélisation du code avec MPI

En dépit des progrès énormes des moyens de calcul informatiques réalisés ces dernières années, les simulations numériques MHD tridimensionnelles sont toujours trop coûteuses en temps pour pouvoir être faites sur des ordinateurs de bureaux. Et les problèmes liés à la résolution de l'équation de Poisson n'améliorent rien...Il faut donc avoir recours à des ordinateurs puissants, qui distribuent les calculs sur plusieurs processeurs. Au

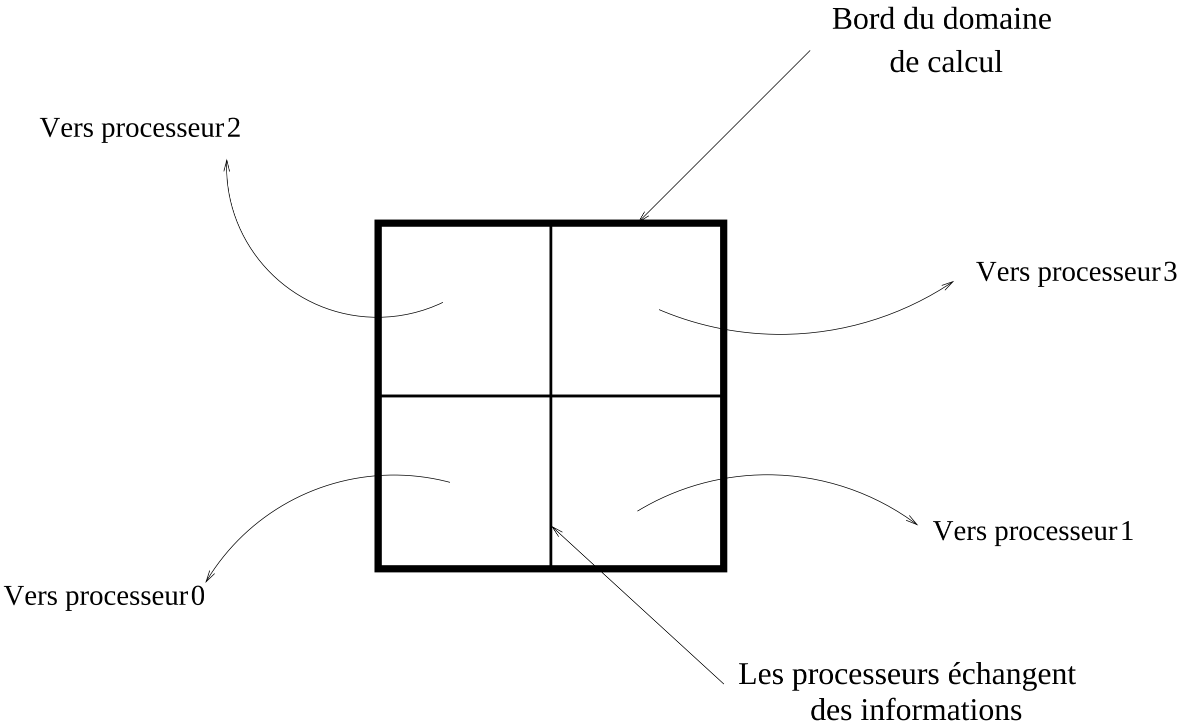

FIG. 2.7 – *Illustration du principe de l'utilisation de MPI : le domaine de calcul est séparé en sous–domaines qui sont chacun affectés à un processeur particulier. Pour le bon déroulement de la simulation, les processeurs s'échangent les valeurs des variables situées au bord des sous–domaines.*

cours de ma thèse, j'ai utilisé essentiellement deux types de machines : tout d'abord, une ORIGIN 2000 comportant 14 processeurs disponible à l'IAP, qui m'a permis de développer le code et de le tester, et l'IBM SP4 de l'IDRIS (Institut du Développement et des Resources en Informatique Scientifique), qui est doté aujourd'hui de 1024 processeurs de grande qualité. Une description des propriétés de cet ordinateur est disponible sur Internet à l'adresse `http://www.idris.fr/`. L'accès y est conditionné par une demande de temps annuelle et nationale qui doit justifier la qualité scientifique du projet et la néccessité de recourir à ce genre d'infrastructure. J'ai obtenu 10000 h de calcul en 2003 et 40000 h en 2004 pour effectuer les simulations qui seront présentées dans le chapitre 4.

Évidemment, l'utilisation d'un grand nombre de processeurs nécessite d'utiliser des techniques de programmation particulières. Dans cette thèse, j'ai utilisé la bibliothèque MPI (pour *"Message Passing Interface"* en anglais). Une excellente description due à P. Pachebo en est disponible à l'URL `http://www.cs.usfca.edu/mpi/`. Son principe est illustré sur la figure 2.7. Il s'agit de découper la grille en autant de sous–domaines que l'ordinateur compte de processeurs. Chacun d'eux résoud le problème MHD sur la sous–grille dont il a la charge. Pour assurer la coordination du travail, des messages sont échangés aux bornes de chaque sous–domaine afin que chaque processeur connaisse les valeurs des variables physiques qui jouxtent sa grille personelle.

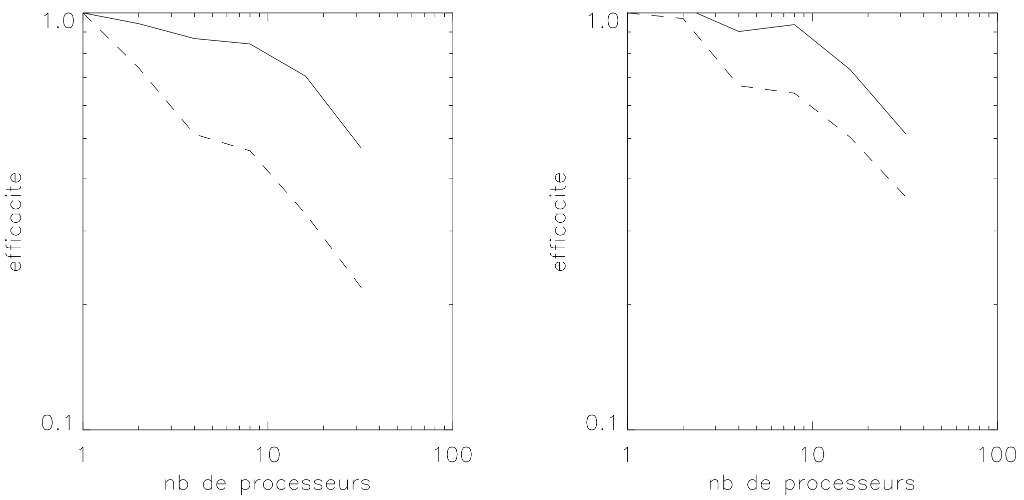

FIG. 2.8 – *Calcul de l'efficacité de la parallélisation (définie dans le texte) en fonction du nombre de processeurs utilisés pour une résolution* $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 64, 128)$ *(figure de gauche) et* $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 128, 128)$ *(figure de droite). Dans les deux cas, la courbe en trait plein correspond à la partie MHD du code et celle en tirets à la partie du code qui résoud l'équation de Poisson. On voit que l'efficacité décroit rapidement dans les 2 cas lorsque le nombre de processeurs est supérieur à 16.*

La partie concernant la résolution de l'équation de Poisson est plus délicate de ce point de vue car il s'agit de résoudre un problème non–local : le potentiel gravitationnel en un point donné d'un sous–domaine dépend en effet de la densité de masse en tous les points de la grille globale, et en particulier de celle des points situés dans d'autres sous–domaines. Il faut donc imaginer une méthode de parallélisation un peu différente pour cette partie du code. La stratégie qui a été retenue est la suivante : pour calculer Φ_s, chaque processeur évalue d'abord la contribution de son domaine aux cellules du bord du domaine de calcul, puis envoie celle–ci aux processeurs qui en ont la charge. Ces derniers font la somme des différentes contributions reçues. Dans une seconde étape, la méthode SOR est utilisée dans chaque sous–domaine de calcul pour évaluer Φ_s. Pour cela, la valeur du potentiel gravitationnel au bord de chaque sous–grille est échangée après chaque itération. Un critère global de convergence est utilisé pour décider de la fin de la procédure itérative.

Malgré l'immense utilité des ordinateurs multi–processeurs, il serait cependant erroné d'imaginer que l'utilisation des 1024 processeurs de l'IBM SP4 de l'IDRIS permette d'accélérer la vitesse d'éxécution du code d'un facteur 1024. En fait, l'addition de chaque nouveau processeur ajoute de nouveaux échanges inter–processeurs qui ralentissent le calcul. Il faut donc choisir un nombre de processeurs qui permette d'accélérer le code avec une bonne efficacité. Si on appelle $\Delta t_{CPU}(N_{proc})$ le temps CPU requis pour effectuer un pas de temps en utilisant N_{proc} processeurs, alors on peut définir un paramètre d'efficacité "eff(N_{proc})" par :

$$\text{eff}(N_{proc}) = \frac{\Delta t_{CPU}(1)}{\Delta t_{CPU}(N_{proc}) N_{proc}} . \tag{2.37}$$

Cette fonction est généralement comprise entre 0 et 1 et l'efficacité de la parallélisation est d'autant meilleure qu'elle est proche de l'unité. Elle est représentée sur la figure 2.8 en fonction du nombre de processeurs utilisés pour une simulation de résolution $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 64, 128)$ (*figure de gauche*) et $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 128, 128)$ (*figure de droite*). Sur chaque figure, la courbe en trait plein représente l'efficacité de la parallélisation pour la partie MHD des équations et la courbe en traits tirets celle concernant la partie du code qui résoud l'équation de Poisson. A chaque fois, l'efficacité de cette dernière est moins bonne que celle de la première, ce qui est probablement dû au caractère non local de l'équation de Poisson. On observe également que la parallélisation est plus efficace lorsque la résolution de la simulation augmente, ce qui s'explique par le fait que les sous–domaines de calcul deviennent plus gros et donc que les communications inter–processeurs sont relativement moins importantes.

Enfin, on retiendra comme ordre de grandeur que eff(N_{proc}) chute de manière dramatique lorsque le nombre de processeurs dépasse 16. Dans la suite de cette thèse, c'est donc généralement le nombre de processeurs que j'ai utilisé.

Chapitre 3

Simulations 2D

Sommaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, je présente les résultats de simulations numériques bidimensionnelles réalisées avec Zeus-2D. La symétrie cylindrique est préservée dans ces calculs, ce qui empêche la croissance d'une instabilité gravitationnelle asymétrique et la naissance de bras spiraux.

Les objectifs de cette étude sont multiples. Il s'agit d'abord de comparer les propriétés de l'instabilité MRI dans un disque massif et dans un disque de masse nulle, et en particulier de voir si ces propriétés dépendent de l'auto–gravité. La turbulence MHD résultant de la phase linéaire de l'instabilité MRI crée localement des fluctuations de densité. Sont-elles suffisantes pour entraîner la fragmentation du disque ? Je m'intéresserai également au profil de moment cinétique qui résulte de la turbulence. Dans un disque de faible masse, il est Keplerien. À priori, on s'attend à une modification de cette propriété lorsque le disque est massif. Les simulations présentées dans ce chapitre permettront de mieux quantifier cette déviation. Enfin, ces simulations permettront de préparer et de justifier les simulations 3D qui seront présentées dans la suite de cette thèse.

3.2 Construction de modèles de disques auto-gravitants

Toutes les simulations présentées dans ce chapitre et les suivants ont comme condition initiale un tore massif *en équilibre hydrostatique*. Cela permet de bien mettre en

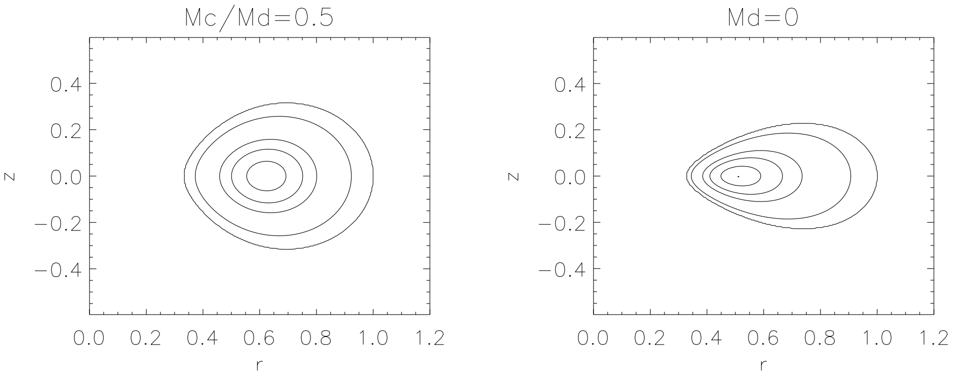

FIG. 3.1 – *Contours d'iso-densité dans le plan (r-z) pour le tore auto-gravitant (figure de gauche) et pour le tore de masse nulle (figure de droite). Dans les deux cas, le maximum de la densité est* $\rho_{max} = 1$. *Cinq niveaux sont représentés sur la figure :* $\rho = 10^{-4}, 0.1, 0.5, 0.7$ *et* 0.9. *On a utilisé une équation d'état adiabatique (*$P \propto \rho^{5/3}$*) et une loi du type* $\Omega \propto r^{-q}$ *avec* $q = 1.68$ *pour la vitesse angulaire.*

évidence les propriétés des instabilités magnétiques ou gravitationnelles susceptibles de se développer.

Cependant, la construction de tels modèles de disques auto-gravitants n'est pas triviale. En effet, la densité dans le disque dépend du potentiel gravitationnel, mais celui-ci est lui-même fonction du champ de densité. Pour résoudre ce problème, j'ai utilisé la méthode itérative dite du champ auto-cohérent (ou SCF pour *"Self Consistent Field"* en anglais) développée par Ostriker & Mark (1968) et adaptée aux systèmes en rotation rapide par Hachisu (1986).

Le but est de résoudre l'équation d'équilibre hydrostatique décrivant la structure du disque. Elle s'écrit dans un repère cylindrique $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z})$:

$$-\boldsymbol{\nabla} P - \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi_s + \rho r \Omega^2 \boldsymbol{e_r} = 0 \,, \tag{3.1}$$

où les notations sont les mêmes que celles qui ont été introduites au chapitre précédent. Si on utilise une équation d'état barotropique (la pression dépend seulement de la densité), alors Ω est uniquement fonction de la distance à l'axe de rotation (Tassoul, 1978) et l'équation (3.1) s'écrit sous forme intégrale :

$$\int \frac{dP}{\rho} + \Phi_s - \int r\Omega^2 dr = C \,, \tag{3.2}$$

où C est une constante dont la valeur est déterminée dans la suite. L'équation d'état est adiabatique et un profil de vitesse angulaire en loi de puissance est utilisé :

$$P = K\rho^{1+1/N} \tag{3.3}$$

$$\Omega = h_0 r^{-q}\,, \tag{3.4}$$

où K et h_0 sont des constantes. Avec ces définitions, on peut réécrire l'équation (3.2) sous la forme :

$$H(r,z) = K(N+1)\rho(r,z)^{1+1/N} = C - \Phi(r,z) - \frac{h_0^2}{2-2q} r^{2-2q} \tag{3.5}$$

Dans notre cas, on veut calculer la structure d'un tore à symétrie cylindrique. On impose donc :

$$\rho(R_{in},0) = \rho(R_{out},0) = 0\,. \tag{3.6}$$

Ici, R_{in} et R_{out} sont les rayons interne et externe du tore.

L'algorithme utilisé pour calculer la structure d'un tore est le suivant : on part d'une distribution de matière quelconque, ce qui permet de calculer la valeur du potentiel gravitationnel grâce aux techniques décrites dans le chapitre 2 (notons qu'il est possible sans difficulté de principe de rajouter à ce potentiel une composante supplémentaire provenant d'une masse centrale ponctuelle). On détermine ensuite la valeur des constantes C et h_0 grâce aux conditions de bord ci-dessus, puis on calcule la valeur de $H(r,z)$ avec l'équation (3.5). La valeur maximum de la densité ρ_{max} est arbitrairement imposée. Elle sert de facteur normalisant. On peut alors calculer la constante polytropique par la relation

$$K = \frac{H_{max}}{(N+1)\rho_{max}^{1+1/N}}\,, \tag{3.7}$$

où H_{max} est la valeur maximum de la fonction H. On calcule également la valeur de la densité en tout point. On peut alors recommencer une nouvelle itération en évaluant une nouvelle valeur du potentiel gravitationnel. L'algorithme précédent est répété jusqu'à avoir une convergence correcte des diverses variables intervenants dans le problème.

Dans la pratique, les grandeurs physiques du problème sont normalisées. On choisit $G = 1$, $\rho_{max} = 1$ et $R_{out} = 1$. On ajoute également une masse centrale M_c en spécifiant le rapport M_c/M_d, où M_d est la masse (normalisée) du disque. Pour revenir à des variables dimensionnées, il suffit de se donner deux variables indépendantes. On peut choisir par exemple de spécifier la masse de l'objet central et le rayon externe du disque. Le rapport M_c/M_d donne alors la masse du disque, qui permet de calculer ρ_{max}, et donc $\rho(r,z)$. On peut alors en déduire Φ_s, puis les autres grandeurs physiques en utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique et les conditions aux limites.

Grâce à cette méthode, j'ai pu calculer la structure d'un tore massif dont les contours d'iso-densité sont représentés sur la figure 3.1 (*schéma de gauche*). Les paramètres de ce modèle sont $R_{in} = 0.25$, $q = 1.68$ (choisi de manière à ce que le profil ne soit pas Keplerien), et on a ajouté une masse centrale ponctuelle dont la masse est la moitié de celle du disque. Dans les simulations que je vais présenter, l'évolution de ce tore sera

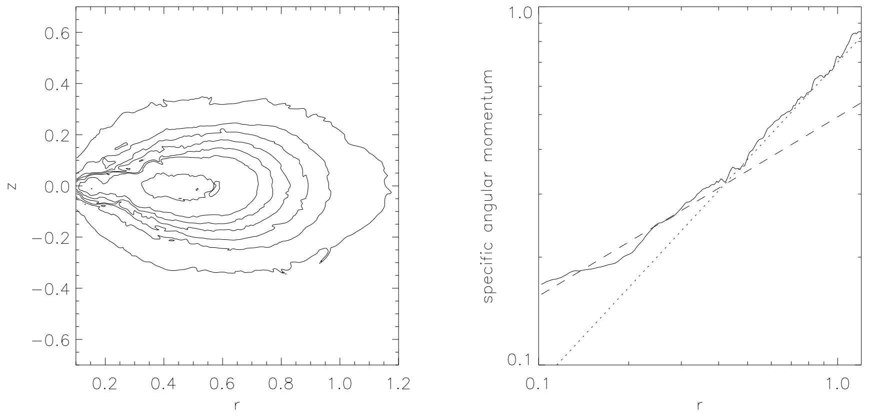

FIG. 3.2 – *La partie gauche de cette figure montre les contours d'iso-densité du disque auto-gravitant dans le plan (r-z) après 5.85 orbites. 7 niveaux sont représentés :* $\rho = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$. *La partie droite montre le profil radial du moment cinétique spécifique (trait plein). La courbe en traits tirets représente le profil Keplerien associé à la masse centrale tandis que la courbe en pointillés est un ajustement de la partie externe de la courbe pour lequel le moment cinétique spécifique est proportionnel à* $r^{0.9}$.

comparée à celle d'un tore de masse nul (c'est à dire dont le potentiel gravitationnel est négligé) dont les contours d'iso-densité sont montrés sur la même figure (*schéma de droite*). Dans ce cas, la masse centrale est fixée de manière à obtenir un profil de rotation similaire pour les deux modèles. Le champ de densité peut alors être calculé de manière analytique (Hawley, 2000). On voit sur la figure 3.1 que les deux modèles ont des propriétés similaires. L'objectif des simulations présentées dans la suite est donc de comparer leur évolution MHD afin d'isoler les effets de l'auto-gravité.

3.3 Résultats

Avec Zeus-2D, j'ai réalisé plusieurs simulations numériques de l'évolution du tore massif décrit dans la section précédente. Un champ magnétique faible (c'est à dire tel que la pression magnétique est faible devant la pression thermique) a été ajouté dans le disque, qui a ensuite été laissé libre d'évoluer.

Sous l'effet du champ magnétique, l'instabilité MRI croît puis sature lorsqu'elle atteint une amplitude non-linéaire. Le disque devient complètement turbulent et le moment cinétique est transporté vers ses parties externes. Les contours d'iso-densité de ce disque turbulent sont représentés sur la partie gauche de la figure 3.2 après 5.85 orbites. Le schéma montre en particulier que la turbulence a modifié significativement la distribution initiale de matière en la transportant vers les parties internes du disque. Ce comportement est similaire à celui de l'instabilité MRI dans le disque de masse nul. En particulier, il n'y a pas de signe de fragmentation dans le disque. Au contraire, le potentiel auto-gravitant a plutôt tendance à réduire les fluctuations de densité et non pas à les accentuer comme on aurait pu s'y attendre.

J'ai également calculé le profil radial de rotation du disque, comme le montre la partie droite de la figure 3.2 (*courbe en trait plein*). Il est Keplerien dans les parties internes (*courbe en tirets*) car le potentiel gravitationnel est dominé par la masse centrale, mais en dévie fortement dans les parties externes, où on obtient $v_\phi = cste$ (*courbe en traits pointillés*).

Bien sûr, les résultats de cette partie sont limités car les calculs supposent que la symétrie cylindrique est conservée au cours de la simulation. En particulier, des bras spiraux ne peuvent pas apparaître dans le disque et la turbulence MHD finit par disparaître à cause du théorème de Cowling. Des simulations tridimensionnelles sont donc nécessaires pour une description plus réaliste des phénomènes de transport dans les disques massifs et magnétisés. Elles seront l'objet du chapitre 4.

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont présentés en détail dans les pages suivantes où est reproduit l'article *"Evolution of self-gravitating magnetized tori. I- Axisymmetric simulations"*, accepté pour publication à la revue *The Astrophysical Journal.*

Draft version July 22, 2004
Preprint typeset using LaTeX style emulateapj v. 2/19/04

EVOLUTION OF SELF-GRAVITATING MAGNETIZED DISKS. I- AXISYMMETRIC SIMULATIONS

Sébastien Fromang [1]
Institut d'Astrophysique de Paris, 98Bis Bd Arago, 75014 Paris, France
and
Steven A. Balbus [2] and Jean-Pierre De Villiers
Virginia Institute of Theoretical Astronomys, Department of Astronomy, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903-0818

Draft version July 22, 2004

ABSTRACT

In this paper and a companion work, we report on the first global numerical simulations of self-gravitating magnetized tori, subject in particular to the influence of the magnetorotational instability (MRI). In this work, paper I, we restrict our calculations to the study of the axisymmetric evolution of such tori. Our goals are twofold: (1) to investigate how self-gravity influences the global structure and evolution of the disks; and (2) to determine whether turbulent density inhomogeneities can be enhanced by self-gravity in this regime.

As in non self-gravitating models, the linear growth of the MRI is followed by a turbulent phase during which angular momentum is transported outward. As a result, self-gravitating tori quickly develop a dual structure composed of an inner thin Keplerian disk fed by a thicker self-gravitating disk, whose rotation profile is close to a Mestel disk. Our results show that the effects of self-gravity enhance density fluctuations much less than they smooth the disk, and giving it more coherence. We discuss the expected changes that will occur in 3D simulations, the results of which are presented in a companion paper.

Subject headings: accretion, accretion disks - MHD - gravitation - methods: numerical

1. INTRODUCTION

Accretion disks are the natural outcome of collapsing rotating structures. In some cases, their masses can be quite large and self-gravitating effects may be important. For example, observations of water maser emission in NGC 1068 seem to suggest the presence of a self-gravitating disk (Huré 2002; Lodato & Bertin 2003). On smaller spatial scales, self-gravity is crucial in the final stages of star formation. Low angular momentum material is thought to collapse to a protostar on a timescale of 10^5 years, with higher angular momentum material forming a surrounding disk (Cassen & Moosman 1981). Since the mass of this disk grows as infall from the parent cloud continues, the disk itself could, in principle, become self-gravitating.

The evolution of self-gravitating disks is strongly dependent upon the value of the Toomre Q parameter:

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma}\,, \tag{1}$$

where c_s is the sound speed, κ the epicyclic frequency and Σ the disk surface density. When Q ranges between 1 and 2, numerical experiments show that nonaxisymmetric instabilities, in the form of spiral density waves, redistribute matter and transport angular momentum outwards (Tohline & Hachisu 1990; Laughlin et al. 1997; Pickett et al. 2000a, 2003; Mayer et al. 2002).

These calculations are purely hydrodynamical, and ignore magnetic fields. But the latter can be of great importance in a rotating gas, even when the fields are comparatively weak. This is a result of the magnetorotational instability (MRI) (Balbus & Hawley 1991, 1998), the outcome of which is a greatly enhanced outward turbulent angular momentum transport.

We report here on the first MHD global simulations of a self-gravitating disks. We are interested in how the internal structure of the disk evolves. Angular momentum transport is probably the most important process affecting the disk, determining its size, surface density profile, and surface emissivity. There is, moreover, the possibility that planets may form in the disk by gravitational collapse, as some recent simulations suggest (Boss 1997, 1998; Mayer et al. 2002), though this notion is not entirely free of controversy (Tohline & Hachisu 1990; Pickett et al. 2000b). The presence of MHD turbulence would certainly influence this issue.

As a first step, we begin our study of magnetized self-gravitating disks by carrying out a series of axisymmetric numerical simulations performed with the Zeus-2D code. This restriction in dimensionality precludes the growth of nonaxisymmetric gravitational instabilities, and allows the initial focus to be centered on the MRI. The obvious shortcoming of this approach is that Cowling's Theorem prevents the long term maintenance of MHD turbulence in 2D systems. Experience with global MHD codes has shown, however, that there is an extended period of evolutionary development before substantial field decay occurs, and that many of the flow features observed during this time are robust, reappearing in fully 3D calculations. Another important advantage is of no small practical interest: in 2D it is possible to follow the global evolution of these magnetized, self-gravitating systems with standard, "in-house" computational resources. More computationally expensive 3D simulations are presented in a companion work, paper II of this series.

The paper is organized as follows. In §2, we describe

[1] E-mail:fromang@iap.fr
[2] Laboratoire de Radioastronomie, École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris CEDEX 05, France

our initial equilibrium state and the numerical methods used. Section 3 is a description of our results, including a comparison with non self-gravitating calculations. In section 4, we summarize our conclusions.

2. PRELIMINARIES

2.1. *The initial configuration*

The initial equilibrium for a self-gravitating disk satisfies the equation of hydrostatic balance, which reads, in standard cylindrical coordinates $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z})$:

$$-\boldsymbol{\nabla} P - \rho \boldsymbol{\nabla}(\Phi_s + \Phi_c) + \rho r \Omega^2 \boldsymbol{e_r} = 0 \,. \tag{2}$$

Here ρ is the density, P the pressure, Φ_s the self-gravitating potential, Φ_c the potential created by a central mass M_c and Ω the angular velocity. Finding an equilibrium is not straightforward because of the global character of self-gravity; an interative method has proven to be relatively efficient. This is the Self-Consistent Field (SCF) method developed by Hachisu (1986). The equation of state for the gas is polytropic, and the angular velocity profile is fixed *a priori*. We assume that the initial structure is a torus with pressure and angular velocity profiles given by

$$P = K_p \rho^\gamma \,, \tag{3}$$

$$\Omega = \Omega_0 (r/r_0)^{-q} \,, \tag{4}$$

where K_p and Ω_0 are constants. We chose an adiabatic equation of state ($\gamma = 5/3$), and took $q = 1.68$, a value that allows for a combination of self-gravity and pressure support. The equilibrium boundary conditions are

$$\rho(R_{in}) = \rho(R_{out}) = 0 \,, \tag{5}$$

where R_{in} and R_{out} are respectively the inner and outer radii of the torus. For all models, we chose $R_{out} = 1$, normalized the density such that $\rho_{max} = 1$, and took $G = 1$. The SCF method then involves guessing an initial density profile, and solving iteratively for the density corrections and converged potential. The values of K_p and Ω_0 emerge in the process.

In Figure 1, we compare the result of such a procedure with the density field of a zero mass torus. Both models have $R_{in} = 1/3$. The left panel shows the density contours of the self-gravitating disc. A central point mass containing half the mass of the torus is assumed to be present. The right panel shows the density contours of the massless disc. The gravitational potential in this case is due only to a central point mass, which was taken to be $GM_c = 0.35$, chosen so that the angular momentum radial profiles of both models were very close. This is important if we want to have similar MRI growth rates. Although the "massless" model is more elongated because of the central concentration of the Keplerian potential, the density field of both models are rather comparable. They will be used as starting points of the following calculations.

At the beginning of the numerical simulations, a weak poloidal magnetic field, confined to lie inside the torus, is added to the equilibrium structure. We follow the method described in Hawley (2000), with the toroidal component of the potential vector given by:

$$A_\phi \propto \rho \cos \left(2\pi \frac{r - R_{in}}{R_{out} - R_{in}} \right) . \tag{6}$$

Radial and vertical component of the magnetic field are then normalized so that the volume averaged value of the ratio of gas pressure to magnetic energy $\langle \beta \rangle$ equals a predetermined value. The new magnetized configuration is no longer in equilibrium, and the resulting small disturbances are sufficient to trigger the MRI.

2.2. *Algorithms*

The equations of ideal MHD are:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{7}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right) = -\boldsymbol{\nabla} P - \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi + \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} \tag{8}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} \right) \left(\frac{e}{\rho} \right) = -P \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{10}$$

Here ρ is the density, e the energy density, $\boldsymbol{v}$ the fluid velocity, $\boldsymbol{B}$ the magnetic field, P the pressure and Φ the total gravitational potential, i.e. the sum of the self-gravitating and the central mass potentials. We have carried out our numerical simulations with the Zeus-2D code.

Zeus-2D has been described in detail by Stone & Norman (1992a,b). It solves the above equations using time-explicit Eulerian finite differences. Different geometries are allowed through the use of a covariant formalism; here we use cylindrical coordinates throughout. The magnetic field is evolved using the constrained transport method (Evans & Hawley 1988), which guarantees the divergence-free constraint to be satisfied at all times if it is satisfied initially. Electromotive forces are calculated using the method of characteristics so that Alfvén wave propagation is accurately calculated (Stone & Norman 1992b). Different boundary conditions are implemented. In the simulations reported here, we have used outflow boundary conditions everywhere.

We have used the code in its original form, except for the calculation of Φ_s. We detail here the procedure used.

To calculate the gravitational potential due to an isolated distribution of matter, one proceeds in two steps. First, Φ_s is calculated on the boundary of the computational domain by a direct Green's function expansion (see below), and then it is calculated on the whole grid by the Succesive Over Relaxation Method (SOR) described in Hirsch (1988). While rapid algorithms have been developped for the second step, the first remains very time consuming. Traditionally, spherical harmonics have been used as the basis for the Green's function expansion (Stone & Norman 1992a; Boss & Myhill 1995; Muller & Steinmetz 1995; Yorke & Kaisig 1995) even when the simulations are not performed in spherical geometry. Recently, Cohl & Tohline (1999) have argued that a Legendre function basis is better suited to cylindrical geometry. They give a very compact formula for the gravitational potential of an axisymmetric matter distribution, well suited for axisymmetric numerical simulations in the (r, z) plane:

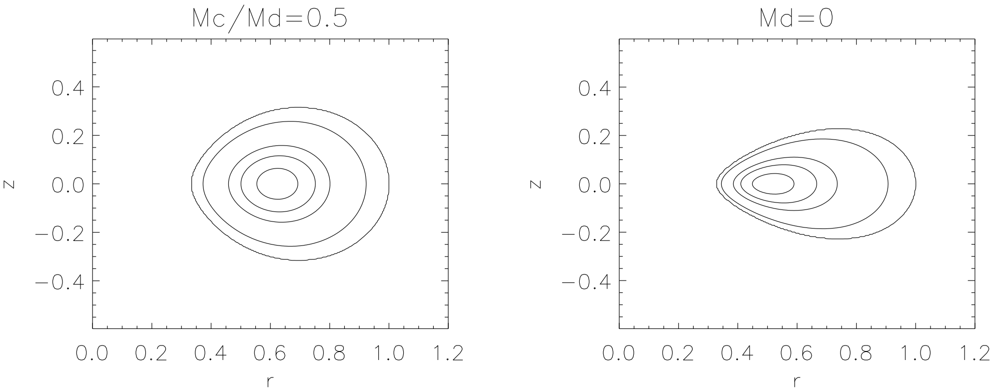

FIG. 1.— Density contour in the (r-z) plane of 2 tori whose density field has been computed using the SCF method. The maximum density is $\rho_{max} = 1$ and there are 5 contour levels with $\rho = 10^{-4}, 0.1, 0.5, 0.7$ and 0.9. The calculations are done with $P \propto \rho^{\gamma}$ with $\gamma = 5/3$ and $\Omega \propto r^{-q}$ with $q = 1.68$. The left hand side model has a central mass whose mass is half that of the torus, and the right hand side model is a zero mass torus.

$$\Phi_s(r,z) = -\frac{2G}{\sqrt{r}} \int dr' dz' \sqrt{r'} \rho(r', z') \mu K(\mu) \,, \qquad (11)$$

where the integral has to be taken over the whole computational domain (r,z). Here

$$\mu = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'} \qquad (12)$$

and K represents the complete elliptic integral of the first kind (Abramowitz & Stegun 1965). We have used equation 11 in our simulations to calculate Φ_s on the boundary. Inside the computational domain, we then solved the Poisson equation using the SOR method cited above.

Even with the advantages of this procedure, the computation of the gravitational potential is still very expensive. For high resolution runs, we re-evaluated the potential only when it had changed by more than a threshold value (Stone & Norman 1992a). Comparison with lower resolution runs in which the potential was updated at every time step suggests that the overall results are not significantly affected by this approximation.

2.3. *Diagnostics*

Here we define the vertical and volume averages used to analyse the calculations. The simplest is $\langle\beta\rangle$, mentioned in section 2.1 (remember that the symbol $\langle . \rangle$ stands for a volume average):

$$\langle\beta\rangle = \frac{\langle P \rangle}{\langle B^2/8\pi \rangle} \,. \qquad (13)$$

To make a connection with the standard disc theory, we use height averages of the Maxwell and Reynolds stresses, which will be denoted using an overbar. The Maxwell and Reynolds stresses will respectively be calculated using (Hawley 2000):

$$T_{r\phi}^{Max}(r,t) = -\frac{\overline{B_r B_\phi}}{4\pi} \,, \qquad (14)$$

$$T_{r\phi}^{Rey}(r,t) = \overline{\rho v_r v_\phi} - \frac{\overline{\rho v_r}\;\overline{\rho v_\phi}}{\overline{\rho}} \,. \qquad (15)$$

Model	M_c/M_d	H/2	$\langle\beta\rangle$	resolution
T	0.5	0.6	-	128×128
A1	0.5	0.6	400	256×256
A2a	0.5	0.6	1500	128×128
A2b	0.5	0.6	1500	256×256
B	∞	0.5	200	256×256

TABLE 1
MODEL PARAMETERS. COLUMN 2 GIVES THE RATIO BETWEEN THE CENTRAL MASS M_c AND THE DISC MASS M_d. COLUMN 3 GIVES THE HEIGHT OF THE COMPUTATIONAL DOMAIN (EXTENDING BETWEEN $-H/2$ AND $H/2$). COLUMN 4 GIVES THE RATIO OF THE VOLUME AVERAGED INITIAL VALUES OF THE THERMAL AND MAGNETIC PRESSURE. COLUMN 5 GIVES THE RESOLUTION OF THE RUN.

Note that in 3D, self-gravity would also produce a stress that gives rise to angular momentum transport, but not in axisymmetry. When the Maxwell and Reynolds stress tensors are normalized by the pressure, the standard α parameter (Shakura & Sunyaev 1973) emerges:

$$\alpha(r,t) = \frac{T_{r\phi}^{Max} + T_{r\phi}^{Rey}}{\overline{P}} \,. \qquad (16)$$

A volume-averaged Maxwell stress tensor can also be defined:

$$\langle T_{r\phi}^{Max} \rangle(t) = \frac{\int_{R_{in}}^{R_{out}} T_{r\phi}^{Max}(r,t) r dr}{\int_{R_{in}}^{R_{out}} r dr} \,, \qquad (17)$$

with similar definitions for the volume-averaged Reynolds stress and for $\langle\alpha\rangle$.

3. RESULTS

3.1. *Model description*

The parameters of the simulations we performed are summarized in table 1. Model T is a hydrodynamical run done as a control study. No axisymmetric Jeans instability should be present, and none was found. (The integration time was 10 orbits at the initial location of the pressure maximum.)

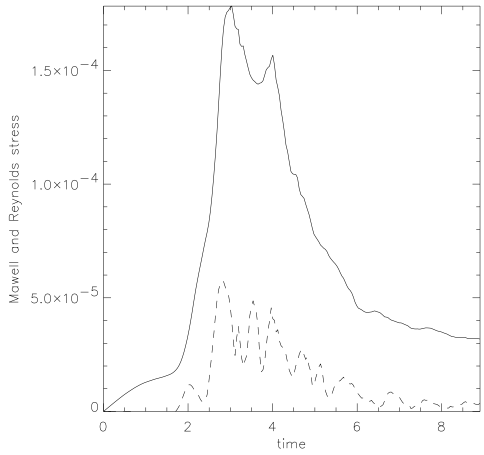

FIG. 2.— Maxwell (*solid line*) and Reynolds (*dashed line*) stress history in model A2b. The time is measured in units of the initial orbital time at pressure maximum. The initial growth of the MRI is shown by the rapid buildup of the Maxwell stress, and is followed by a turbulent phase during which the Maxwell stress decays because of the anti-dynamo theorem. In agreement with simulations of non self-gravitating discs, the Reynolds stress tensor is always smaller than the Maxwell stress.

In models A2a and A2b, our fiducial runs, a central mass with half the mass of the disc is present. Initially, the angular velocity has a non-Keplerian power law profile, with $\Omega \propto r^{-1.68}$. The magnetic field is initialized as described above, with an initial $\langle\beta\rangle$ of 1500. The grid resolution is 128×128 for model A2a and 256×256 for model A2b. Both models give the same qualitative results; we focus now on the high resolution run.

Figure 2 shows the volume averaged Maxwell (*solid line*) and Reynolds (*dashed line*) stress tensor history for model A2b. The Maxwell stress shows the initial growth typical of the MRI. One can see during this phase the development of the radial streaming structures often observed in local and global simulations of zero mass discs (Hawley 2000). The linear MRI saturates after 3 orbits, and then breaks down into turbulence. In accord with the non self-gravitating results, figure 2 also shows that the Reynolds stress has a significantly smaller amplitude than the Maxwell stress at all times: most of the angular momentum transport is due to the magnetic stress.

In Figure 3 (left panel), we show the contours of the density distribution in the $(r-z)$ plane for model A2b at time 5.85, just after turbulence has set in (cf also the left hand side of Figure 4). The initial torus has developed a dual structure composed of an inner thin disc, through which matter is accreted toward the central point mass, and an outer thick torus that feeds the inner disc. The gravitational potential is dominated by the central star in the inner thin disc, and by self-gravity in the outer thick disc. Figure 3 (*right panel*), shows that the rotation profiles are consistent with this. We plot the angular momentum profile in the equatorial plane of the disc averaged between orbits 5.05 and 7 (*solid line*). The inner disc is in Keplerian rotation around the central mass (*dashed line*) out to a radius of 0.4. Beyond this point, a power law with exponent 0.9 can be fit to the

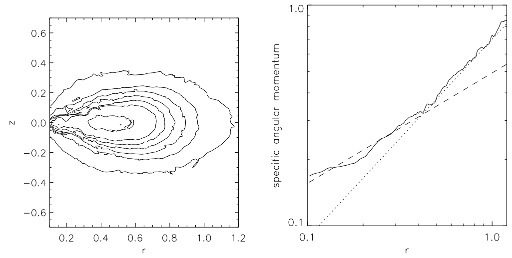

FIG. 3.— The left hand side panel shows the density contour in the (r-z) plane for model A2b after 5.85 orbits, normalized by the maximum density. There are 7 levels: $\rho/\rho_{max} = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$. The right panel shows the specific angular momentum profile (*solid line*) for the same model averaged between orbits 5.05 and 7. The dashed line shows the Keplerian profile expected for the central mass, while the dotted line is a fit of the outer part of the disc, with $l \propto r^{0.9}$.

profile (*dotted line*), close to the constant V_ϕ profile of a fully self-gravitating Mestel disc (Binney & Tremaine 1987; Bertin & Lodato 1999).

In our disk model, $Q_{min} \sim 0.3$, which means that the smallest unstable wavelength λ_{min} is roughly equal to 0.5, which is smaller than the radial extent of the disk. In spite of the presence of these unstable wavelengths, self-gravity does not seem to be able to enhance local MRI density inhomogeneities.

3.2. *Comparison with zero mass tori*

Since they have very different structures, the question of how to draw a comparison between self-gravitating and non-self-gravitating runs is not completely straightforward. For example, neither choosing similar initial β values nor saturated α values is satisfactory, since it greatly over emphasizes the (rather minimal) role of gas pressure. More revealing is the value of the stress compared with the rotational energy it is attempting to disturb. Accordingly, we define the ratio R by:

$$R = \frac{\langle T_{r\phi}^{Max}\rangle + \langle T_{r\phi}^{Rey}\rangle}{\langle \rho v_\phi^2\rangle} . \tag{18}$$

By design, $\langle \rho v_\phi^2\rangle$ are similar in each of the initial models. Consequently, the value of R will be determined by the level of angular momentum transport. As noted, the MRI growth rates will be nearly the same in the two models, because the angular velocity profiles are similar. We have found that an initial $\langle\beta\rangle$ value of 200 in our zero mass model gives a very similar evolutionary R profile to our high resolution model A2b (see fig. 5). We refer to this zero mass run as model B.

Density displays for model A2b after 5.85 orbits (*left panel*) and for model B after 5.94 orbits (*right panel*) are shown in figure 4. The scale is logarithmic. Both cases are fully turbulent, but the difference is visually striking: model A2b clearly has a much more coherent internal structure than does model B. An FFT of the radial fluctuations in the disc midplanes shows that on a scale of $\sim 1/15$ of the grid size, the non self-gravitating amplitudes are a factor of ~ 2 larger than those of the self-gravitating run. This is comparable to what is seen

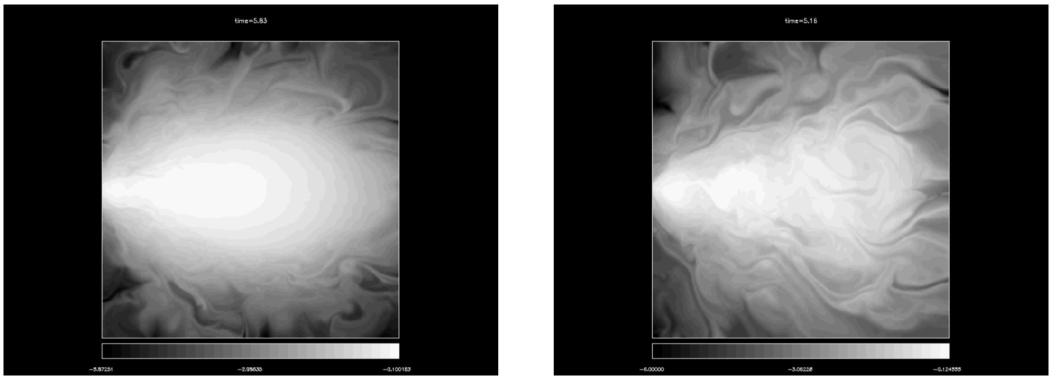

FIG. 4.— Snapshots of the density logarithm in the self-gravitating model A2b (*left panel*) after 5.85 orbits at the initial pressure maximum and in the non self-gravitating model B (*right panel*) after 5.94 orbits. The self-gravitating torus has developed an inner Keplerian thin disc fed by an outer thick ring. The zero mass model shows a much less coherent structure, with large density fluctuations, and an approximately constant H/r value.

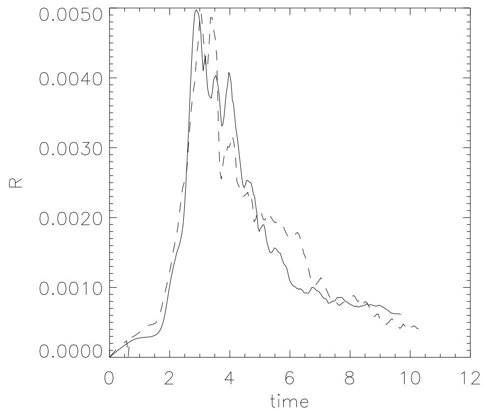

FIG. 5.— Comparison between the time evolution of R (See text) in models A2b (*solid line*) and B (*dashed line*). The values obtained are very close in both runs throughout the simulations.

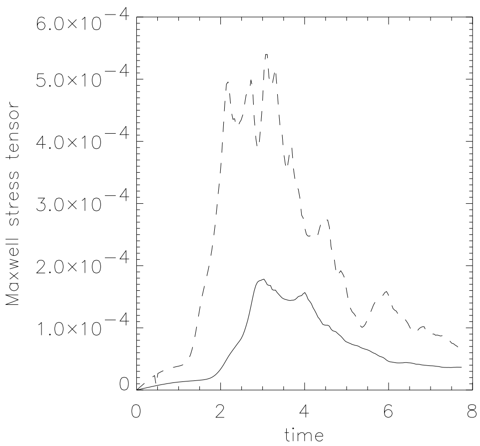

FIG. 6.— Comparison between the time history of the Maxwell stress tensor in model A2a (*solid line*) and in model A1 (*dashed line*).

in the lower resolution model A2a. It is possible that the long range nature of Newtonian gravitational forces is responsible for the higher degree of coherence seen in self-gravitating discs compared with zero mass discs. It should be noted, however, that self-gravitating models also require a higher equilibrium pressure, and this tends to enhance the size of coherent structures, as well (Sano et al. 2004).

3.3. *Effect of the variation of the field strength*

Finally, we consider the effect of the initial field strength on the evolution of the massive torus. We compare model A1 ($\langle\beta\rangle = 400$) and A2b ($\langle\beta\rangle = 1500$). Everything else is kept the same.

The Maxwell stress history is shown in figure 6. $\langle T_{r\phi}^{Max}\rangle$ is larger in model A1 (*dashed line*) during the whole simulation. It exceeds the value reached in model A2b (*solid line*) by a factor of about 3 at the maximum stress level. A larger stress results in a larger mass accretion rate in model A1 compared with model A2b. This behaviour of retaining a memory of the initial field strength is qualitatively similar to what has been found before in 2D simulations of zero mass discs (Stone & Pringle 2001).

Figure 7 shows the state of model A1 after 5.83 orbits (it should be compared with model A2b in figure 3). Density contours are presented on the left side and the angular momentum radial profile on the right side. The density structure at this stage is more disturbed than in model A2b, showing a larger level of MHD turbulence. However, the disc naturally adopts the same radial distribution of angular momentum as in model A2b: Keplerian in the inside, and “Mestellian” in the outer parts. Note that the transition radius is larger in model A1 than in model A2b. This is because the mass accretion rate is larger in the former and the central point mass consequently greater; self-gravity is less important in this

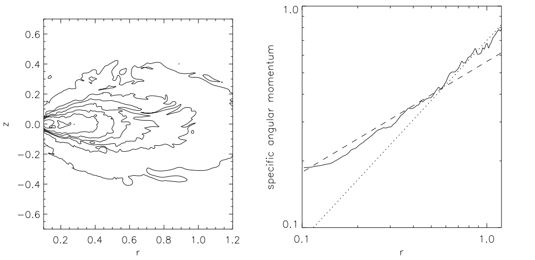

FIG. 7.— Same as figure 3, but for model A1. The left hand side plot is taken after 4.5 orbits at the initial maximum pressure location and the angular momentum shown on the right hand side was averaged between the orbits 3.88 and 5.05.

case.

To conclude: while the simulations retain a memory of their initial field strength and show different levels of turbulent stress, both tend toward a final state of an inner Keplerian rotational profile and an outer Mestel-like self-gravitating rotation profile.

4. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this paper, we have investigated the qualitative behaviour of the MRI in a self-gravitating tori. We performed 2D numerical simulations of the evolution of weakly magnetized, massive tori. The simulations are constructed so that no gravitational instability develops. As a consequence, self-gravity cannot transport angular momentum outward as in 3D. The torus evolves only because of the effect of the MRI induced MHD turbulence. We found that the MRI behaves in these massive discs qualitatively much like it does in the non self-gravitating disc, though there are differences in the density response (see below).

Self-gravitating magnetized tori evolve toward a structure composed of two parts: an inner thin disc in Keplerian rotation around a central mass, fed by an outer more massive thick torus. The gravitational potential in the torus is dominated by the self-gravitating component of the potential and it is no longer Keplerian. Rather, its velocity profile is approximately that of a Mestel disc, v_ϕ = constant. This steepening of the specific angular momentum profile at large radii has been seen in VLBI observations of water maser emission in the active galactic nuclei NGC 1068 (Greenhill et al. 1996). In this case, the best fit to the angular momentum profile is $j \propto r^{0.69}$. Although we don't find exactly the same radial profile, our result is quite close (we obtain $j \propto r^{0.9}$). The disagreement probably comes from the fact that the mass ratio between the central object and the disk in our simulation and in the actual system are different. In the latter, the disk mass is comparable to the central black hole mass (Lodato & Bertin 2003). In our case, the mass of the disk is twice the mass of the central object, thereby giving larger rotational velocities and a steeper profile.

In an attempt to highlight the difference between self-gravitating and zero mass discs, we compared two such simulations with similar density and rotation profiles, and similar evolutionary histories of their stress tensors. The appearance of the zero mass disc was, however, considerably more disrupted than that of the self-gravitating disc. The former showed large density fluctuations, while the latter maintained a much more globally coherent structure. One might have expected to see density fluctuations locally enhanced because of the presence of self-gravity. On the contrary, this is the global nature of the potential that seems to be more important in affecting the evolution of the disk: in this regime, it smoothes the effect of the turbulence and gives more coherence to the disk.

Of course, there are imporant limitations to this study imposed by axisymmetry. First, the turbulence is not sustainable because of the anti-dynamo theorem: it decays and the two component Kepler-Mestel structure described above evolves imperceptively after a few dynamical timescales. Follow-up 3D calculations are essential to track the evolution of this two-component disc. Even more importantly, 3D calculations will allow the development of nonaxisymmetric structure, and allow a full investigation of the interaction between MHD turbulence and spiral structure gravitational instabilities. This important problem is the subject of the companion paper following this one.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Caroline Terquem for a critical reading of an earlier version of this paper, and for constructive comments. SF acknowledges partial support from the Action Spécifique de Physique Stellaire and the Programme National de Planétologie and the EC RTN Programme HPRN-CT-2002-00308. SAB is grateful to the Institut d'Astrophysique de Paris for its hospitality and support, and to NASA for support under grants NAG5-9266, NAG5-13288, and NAG5-10655. JPD is supported by NSF grant AST-0070979 and PHY-0205155, and NASA grant NAG5-9266.

REFERENCES

Abramowitz, M., & Stegun, I. 1965, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (New York: Dover)
Balbus, S., & Hawley, J. 1991, ApJ, 376, 214
—. 1998, Rev.Mod.Phys., 70, 1
Bertin, G., & Lodato, G. 1999, A&A, 350, 694
Binney, J., & Tremaine, S. 1987, Galactic dynamics (Princeton University Press)
Boss, A. P. 1997, Science, 276, 1836
—. 1998, ApJ, 503, 923
Boss, A. P., & Myhill, E. A. 1995, Comput. Phys. Commun., 89, 59
Cassen, P., & Moosman, A. 1981, Icarus, 48, 353
Cohl, H. S., & Tohline, J. E. 1999, ApJ, 527, 86
Evans, C., & Hawley, J. 1988, ApJ, 33, 659
Greenhill, L., Gwinn, C., Antonucci, R., & Barvainis, R. 1996, ApJ, 472, L21
Hachisu, I. 1986, ApJS, 62, 461
Hawley, J. F. 2000, ApJ, 528, 462
Hirsch, C. 1988, Numerical Computation of Internal and External Flows - Volume 1, Fundamentals of Numerical Discretization. (Wiley)
Huré, J.-M. 2002, A&A, 395, L21
Laughlin, G., Korchagin, V., & Adams, F. 1997, ApJ, 477, 410
Lodato, G., & Bertin, G. 2003, A&A, 398, 517
Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2002, Science, 298, 1756
Muller, E., & Steinmetz. 1995, Comput. Phys. Commun., 89, 45
Pickett, B., Cassen, P., Durisen, R., & Link, R. 2000a, ApJ, 529, 1034

Pickett, B., Durisen, R., Cassen, P., & Mejia, A. 2000b, ApJ, 540, L95
Pickett, B., Mejia, A., Durisen, R., Cassen, P., Berry, D., & Link, R. 2003, ApJ, 590, 1060
Sano, T., Inutsuka, S., Turner, N. J., & Stone, J. M. 2004, ApJ, 605, 321
Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, A&A, 24, 337
Stone, J., & Pringle, J. 2001, MNRAS, 322, 461
Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992a, ApJS, 80, 753
—. 1992b, ApJS, 80, 791
Tohline, J., & Hachisu, I. 1990, ApJ, 361, 394
Yorke, W., & Kaisig, M. 1995, Comput. Phys. Commun., 89, 29

Chapitre 4

Simulations 3D

Sommaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'hypothèse de la symétrie cylindrique faite dans le chapitre 3 est abandonnée. Je présente les résultats de simulations 3D de disques massifs et magnétisés réalisées avec le code *GLOBAL*. Des instabilités gravitationnelles asymétriques se développent lorsque le paramètre de Toomre est proche de 1 (voir chapitre 1). En présence d'un champ magnétique, 3 tenseurs sont susceptibles d'exercer un couple sur le disque. Ce sont les tenseurs de Reynolds, de Maxwell et le tenseur gravitationnel. Leur profil radial est respectivement défini par les relations :

$$T_{r\phi}^{Max}(r,t) = -\frac{\overline{B_r B_\phi}}{4\pi}\,, \tag{4.1}$$

$$T_{r\phi}^{Rey}(r,t) = \overline{\rho v_r v_\phi} - \frac{\overline{\rho v_r}\;\overline{\rho v_\phi}}{\overline{\rho}}\,, \tag{4.2}$$

$$T_{r\phi}^{grav}(r,t) = \frac{1}{4\pi G}\overline{\frac{\partial \Phi_s}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta}}\,. \tag{4.3}$$

où les symboles surmontés d'une barre horizontale désignent des moyennes sur l'épaisseur du disque et sur l'angle azimutal. Ces définitions permettent en particulier d'introduire des moyennes volumiques qui servent ensuite à diagnostiquer les propriétés liées au transport de moment cinétique. La moyenne volumique du tenseur de Maxwell s'écrit par exemple :

$$\langle T_{r\phi}^{Max} \rangle (t) = \int_{R_{in}}^{R_{out}} T_{r\phi}^{Max}(r,t)\; rdr \Bigg/ \int_{R_{in}}^{R_{out}} rdr \ . \tag{4.4}$$

Des expressions similaires sont adoptées pour les autres tenseurs. La différence principale avec les simulations présentées dans le chapitre précédent est que le tenseur gravitationnel peut être non nul si une instabilité gravitationnelle apparaît. Dans un tel cas, la question essentielle est de savoir si la turbulence MHD a un effet sur le développement de cette instabilité et sur l'évolution du disque. On cherchera en particulier à comprendre comment le transport du moment cinétique, dont l'importance a été discutée dans le chapitre 1, est affecté.

Le chapitre 1 a également souligné l'importance de l'équation d'état du disque pour l'évolution non–linéaire de l'instabilité gravitationnelle. Le chapitre présent est divisé en trois parties, correspondant chacune à une manière de décrire la thermodynamique dans le disque. Dans la première partie, on fait l'hypothèse la plus simple possible, c'est à dire qu'on suppose le disque adiabatique. Le modèle initial est présenté et les résultats principaux sont résumés avant d'être détaillés dans un article soumis à la revue *The Astrophysical Journal*. Dans une seconde partie, l'équation d'état est supposée localement isotherme, c'est à dire que la température en chaque point du disque est constante au cours de la simulation. Enfin, la troisième partie cherche à décrire le disque de manière un peu plus réaliste, en modélisant très simplement son refroidissement radiatif. Dans chaque cas, l'évolution hydrodynamique du disque est comparée à son évolution MHD afin d'isoler les effets de la turbulence MHD.

4.2 Évolution adiabatique

4.2.1 Le modèle de disque initial

Pour les simulations adiabatiques et isothermes, les propriétés du modèle initial ont été calculées grâce à la méthode SCF présentée dans le chapitre 3. Cette méthode a cependant été légèrement modifiée. En effet, au lieu de spécifier directement le profil radial de vitesse angulaire Ω, on choisit de prescrire la dépendance fonctionnelle du moment cinétique spécifique j, quantité qui est conservée pendant les premières phases de l'effondrement des coeurs denses. Plus précisément, si M_r est la masse du disque contenue dans un cylindre de rayon r, la fonction $j(M_r)$ est telle que :

$$j(M_r) \propto M_r^2 \ . \tag{4.5}$$

Cette dépendance de j a été choisie par analogie avec les modèles décrits par Pickett *et al.* (1996). Les autres paramètres du modèle sont $R_{in} = 0.25$ et $R_{out} = 1$. Comme

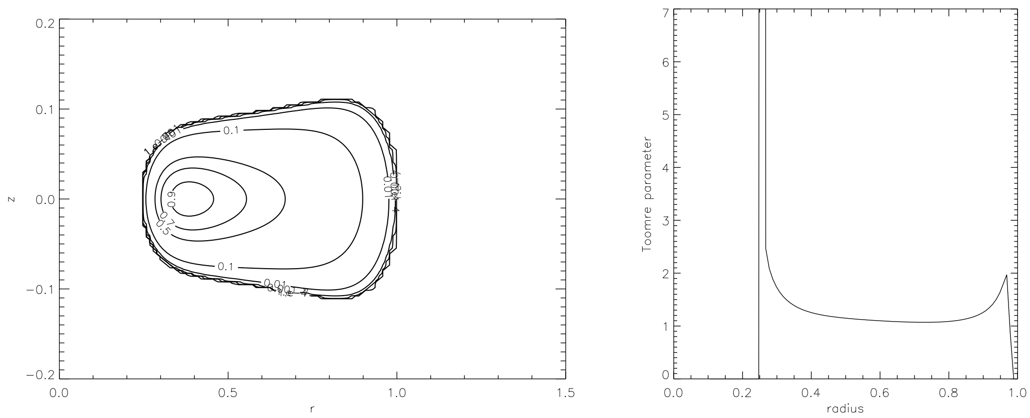

FIG. 4.1 – *Contours d'iso–densité du modèle initial utilisé dans les simulations 3D adiabatiques et localement isothermes (figure de gauche). Les niveaux de densité sont* $\rho = 10^{-7}, 10^{-4}, 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.9$*. Le profil radial du paramètre de Toomre est représenté sur la figure de droite.* Q *est proche de* 1 *dans une très large partie du disque.*

dans le chapitre 3, l'équation d'état est adiabatique, $P \propto \rho^{5/3}$. Finalement, le rapport entre la masse centrale et la masse du disque est égal à 2 de manière à obtenir un paramètre de Toomre Q proche de l'unité. Les résultats sont présentés sur la figure 4.1. Le schéma de gauche montre les contours de densité dans le plan (r, z). Notons que le disque est plus fin que le modèle décrit dans le chapitre 3 : H/r est de l'ordre de 0.1 à 0.2. Le schéma de droite sur la figure 4.1 représente le profil radial de Q. Ce paramètre est de l'ordre de 1 pour les rayons r compris entre 0.4 et 0.9. Étant donné les résultats analytiques présentés dans l'introduction, on s'attend donc à la croissance d'une instabilité gravitationnelle violente dans le disque.

4.2.2 Résultats

a. Transport gravitationnel

Comme attendu, l'évolution hydrodynamique du disque montre l'apparition d'une instabilité gravitationnelle à deux bras (on parle d'un mode $m = 2$). Le mode qui croît est semblable au mode décrit par Papaloizou & Savonije (1991) qui a un rayon de corotation (c'est à dire le rayon pour lequel la vitesse de rotation angulaire des bras spiraux est égale à Ω) confondu avec le rayon externe initial du disque. Pendant la phase non–linéaire de son évolution, le couple gravitationnel qu'il exerce transporte la matière vers les parties internes du disque et le moment cinétique vers les parties externes. Cela entraîne une baisse de la densité surfacique de masse dans le disque et donc une augmentation du paramètre de Toomre. Lorsque celui–ci devient significativement plus grand que 1, l'instabilité disparaît (en pratique, $Q \sim 4$ à la fin de la simulation).

En présence d'un champ magnétique, le disque devient turbulent à cause de l'insta-

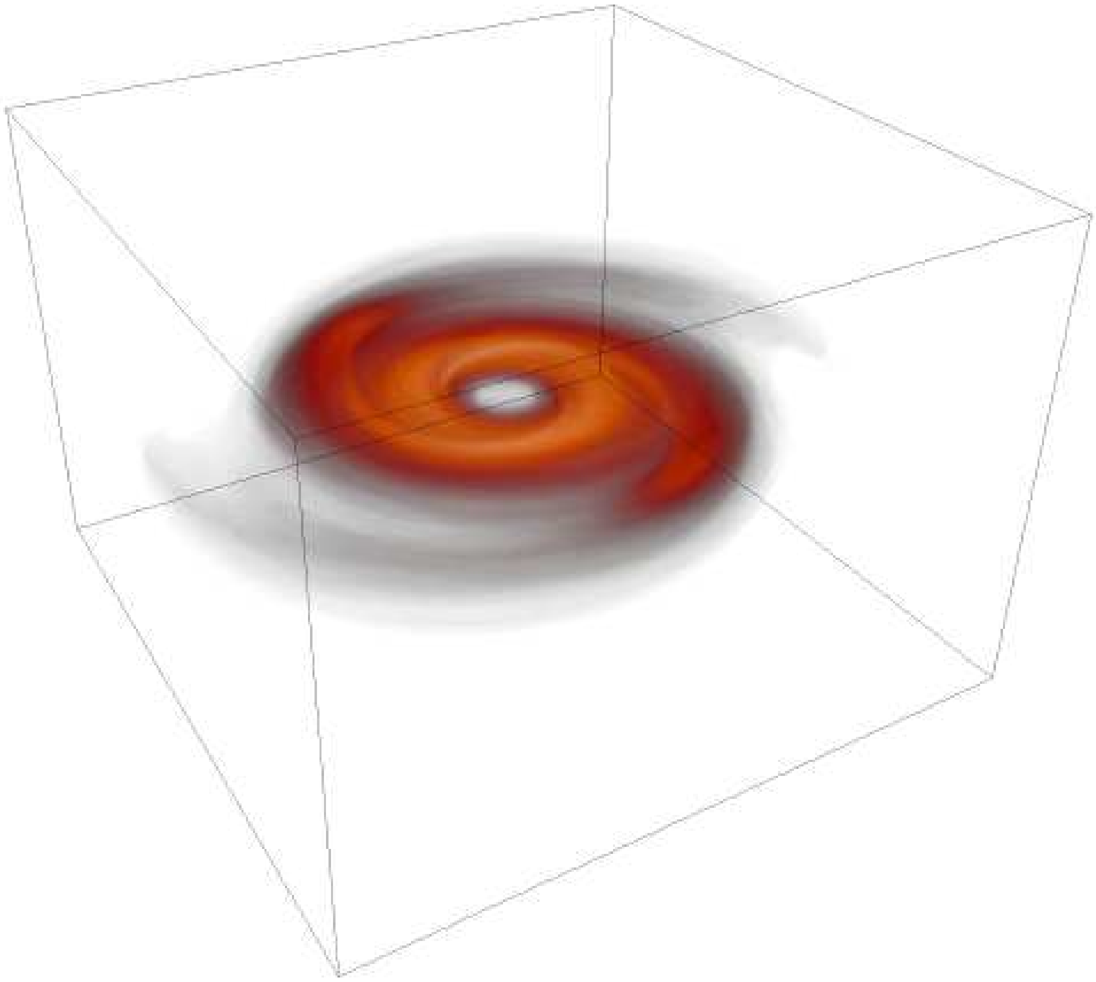

FIG. 4.2 – *État du disque obtenu avec le modèle T2* (voir tableau 4.1) après* 7.7 *orbites. L'équation d'état est adiabatique. Une spirale à deux bras est clairement visible, superposée à des fluctuations de densité à petite échelle dues à la turbulence MHD.*

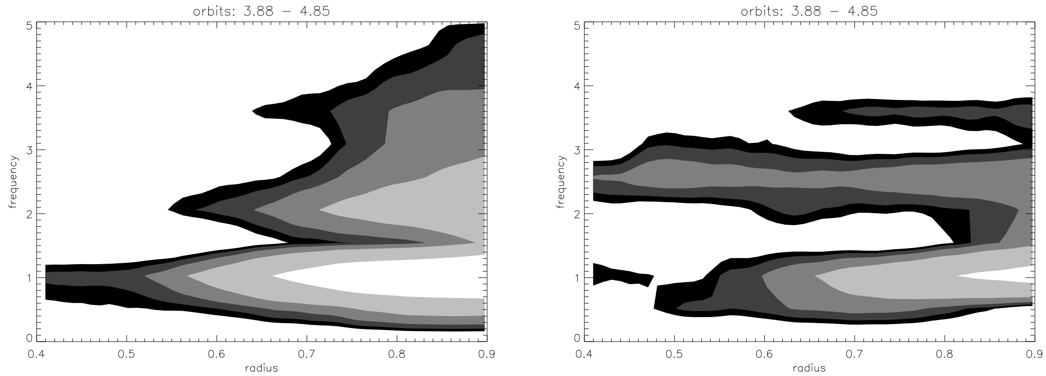

FIG. 4.3 – *Modes présents dans le disque lors de l'évolution hydrodynamique (schéma de gauche) et MHD (schéma de droite). Chaque figure représente l'intensité du coefficient de Fourier de la densité dans le plan* $(rayon, fréquence)$. *Un mode domine à tous les rayons dans le cas hydrodynamique, tandis que deux modes d'intensité comparable sont présents lorsque le disque est turbulent.*

bilité MRI en même temps qu'une instabilité gravitationnelle se développe. La figure 4.2 montre à titre d'exemple une visualisation 3D de l'état d'un tel disque. L'instabilité gravitationnelle est mise en évidence par la présence des bras spiraux dans les parties externes du disque, tandis que la turbulence MHD provoque des fluctuations de densité à petite échelle. Dans ces simulations, il est apparu que la moyenne volumique du tenseur gravitationnel, qui domine sur les tenseurs de Maxwell et de Reynolds, avait une amplitude moyenne plus faible lorsque le disque était turbulent que dans le cas hydrodynamique et qu'il présentait des oscillations périodiques de large amplitude. L'ampleur de ces fluctuations est telle qu'il atteint même des valeurs proches de zéro à certains instants. L'explication de ce phénomène est donnée par la figure 4.3. Elle montre les iso–contours des coefficients de Fourier de la densité dans le plan $(rayon, fréquence)$ calculés sur un intervalle de temps compris entre les instants 3.88 et 4.85 (une unité de temps correspond à une orbite au rayon externe initial du disque). Le schéma de gauche illustre le cas hydrodynamique, pour lequel un mode de fréquence $f_{hyd} = 1$ domine à tous les rayons. Sur la figure de droite, qui montre le cas MHD, un mode supplémentaire apparaît à une fréquence $f_{mhd} = 2.5$, supérieure à celle du mode hydrodynamique, toujours présent. Ce mode à haute fréquence est dominant pour les rayons inférieurs à 0.6. La modulation périodique du tenseur gravitationnel est probablement due à l'interaction non–linéaire de ces deux modes. Dans le cas particulier de ces simulations, cette interaction est renforcée par le fait que la résonance de Lindblad interne (située au rayon pour lequel la vitesse de rotation angulaire des bras spiraux est égale à $\Omega + \kappa$) du mode de fréquence f_{hyd} est proche de la corotation du mode de fréquence f_{mhd}. Tagger *et al.* (1987) ont montré que l'interaction non–linéaire entre deux modes dont les résonances coïncidaient ainsi était en effet plus forte. La conséquence de cette interaction sur l'évolution du disque est que le taux d'accrétion sur l'objet central est lui aussi modulé périodiquement. De plus, lorsque l'instabilité gravitationnelle disparaît à la fin de la simulation, il reste plus de masse dans le disque dans le cas MHD que

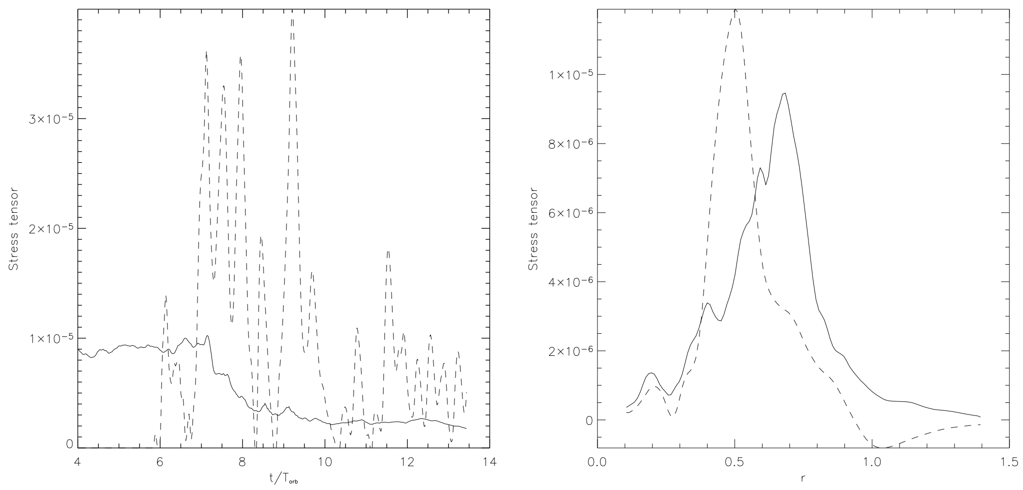

FIG. 4.4 – *La figure de gauche illustre la variation temporelle de la moyenne volumique du tenseur de Maxwell (courbe en trait plein) et du tenseur gravitationnel (courbe en trait tirets) pour le modèle T2*. Sur la figure de droite sont comparés les profils radiaux des mêmes tenseurs (avec les mêmes conventions de représentation) à* $t = 13$. *Leur amplitude est alors comparable.*

dans la simulation hydrodynamique.

Nous avons effectué de nombreux tests : variation de la topologie initiale du champ magnétique, variation du nombre de coefficient de Fourier pris en compte dans le calcul de Φ_s, déclenchement de la turbulence avant l'instabilité gravitationnelle. À chaque fois, le même résultat qualitatif a été obtenu, ce qui suggère qu'il est assez robuste.

b. Effet sur la turbulence MHD

Nous avons également étudié l'effet du développement de ces instabilités gravitationnelles sur les propriétés de la turbulence MHD grâce au modèle T2*, dont les propriétés sont décrites dans le tableau 4.1. Pendant les 6 premières orbites de ce modèle, seule l'instabilité MRI est autorisée à se développer (pour cela, $m_{max} = 0$). Lorsque les propriétés de la turbulence MHD sont stationnaires ($t = 5.8$), les composantes asymétriques du potentiel gravitationnel sont prises en compte (la valeur de m_{max} est alors fixée à 8). Les évolutions temporelles du tenseur de Maxwell et du tenseur gravitationnel sont comparées sur la partie gauche de la figure 4.4, respectivement en trait plein et en traits tirets. On constate en particulier que le tenseur de Maxwell a une valeur quasi–constante entre $t = 4$ et $t = 5.8$, lorsque $m_{max} = 0$, ce qui montre bien la stationnarité de la turbulence MHD. À partir de $t = 5.8$, une instabilité gravitationnelle apparaît et $\langle T_{r\phi}^{grav} \rangle(t)$ prend des valeurs non nulles. Entre $t = 7$ et $t = 9$, la moyenne volumique du tenseur de Maxwell diminue, puis se stabilise à une valeur plus petite d'un facteur 3 que lorsque $m_{max} = 0$. Elle conserve cette valeur pendant le reste de la simulation, qui dure jusqu'à $t = 14$. Cette diminution de $\langle T_{r\phi}^{Max} \rangle(t)$ n'est donc pas due à l'accrétion de la matière sur l'objet central, car celle–ci continue lorsque $t > 9$ alors que le tenseur de Maxwell ne diminue plus. La figure 4.4 suggère en revanche que la présence de la perturbation gravitationnelle entraîne une diminution du niveau de la turbulence. Enfin, la partie droite de cette figure montre les profils radiaux des deux tenseurs à $t = 13$, lorsque leur moyenne volumique est du même ordre. On voit qu'ils sont en effet comparables, et que le tenseur de Maxwell a une valeur non nulle même aux rayons où le tenseur gravitationnel est important, ce qui montre que la turbulence MHD n'est pas complètement inhibée par l'instabilité gravitationnelle, mais subsiste à un niveau plus faible qu'en son absence. Une explication possible de cette diminution du tenseur de Maxwell est la suivante : lorsque le disque est turbulent, le champ magnétique est désordonné à petite échelle. La présence d'une onde de densité tend à le compresser dans les bras spiraux, ce qui favorise la reconnection de lignes de champ de directions opposées. Cela conduit à une diminution global du tenseur de Maxwell.

Les résultats de ces simulations adiabatiques sont présentés en détail dans les pages suivantes où est reproduit l'article *"Evolution of self–gravitating magnetized disks. II-Interaction between MHD turbulence and gravitational instabilities"*, accepté pour publication à la revue *The Astrophysical Journal.*

DRAFT VERSION JULY 22, 2004
Preprint typeset using LaTeX style emulateapj v. 2/19/04

EVOLUTION OF SELF–GRAVITATING MAGNETIZED DISKS. II- INTERACTION BETWEEN MHD TURBULENCE AND GRAVITATIONAL INSTABILITIES

SÉBASTIEN FROMANG[1], STEVEN A. BALBUS[2,3], CAROLINE TERQUEM[1,4] AND JEAN–PIERRE DE VILLIERS[2]

Draft version July 22, 2004

ABSTRACT

We present 3D magnetohydrodynamic (MHD) numerical simulations of the evolution of self–gravitating and weakly magnetized disks with an adiabatic equation of state. Such disks are subject to the development of both the magnetorotational and gravitational instabilities, which transport angular momentum outward. As in previous studies, our hydrodynamical simulations show the growth of strong $m = 2$ spiral structure. This spiral disturbance drives matter toward the central object and disappears when the Toomre parameter Q has increased well above unity. When a weak magnetic field is present as well, the magnetorotational instability grows and leads to turbulence. In that case, the strength of the gravitational stress tensor is lowered by a factor of about 2 compared to the hydrodynamical run and oscillates periodically, reaching very small values at its minimum. We attribute this behavior to the presence of a second spiral mode with higher pattern speed than the one which dominates in the hydrodynamical simulations. It is apparently excited by the high frequency motions associated with MHD turbulence. The nonlinear coupling between these two spiral modes gives rise to a stress tensor that oscillates with a frequency which is a combination of the frequencies of each of the modes. This interaction between MHD turbulence and gravitational instabilities therefore results in a smaller mass accretion rate onto the central object.

Subject headings: accretion, accretion disks - MHD - self–gravity

1. INTRODUCTION

In systems such as the disks surrounding low mass protostars or active galactic nuclei, the simultaneous appearance of both gravitational and magnetic instabilities is expected. During the first stages of their evolution, for example, protoplanetary disks are expected to be rather massive because of strong infall from the parent molecular cloud. As the disk builds up in mass as a result of the collapse of an envelope, its surface mass density becomes large enough for gravitational instabilities to develop (e.g., Laughlin & Bodenheimer 1994). These disks are also believed to be sufficiently ionized, at least over some extended regions, to be coupled to a magnetic field (Gammie 1996; Sano et al. 2000; Fromang et al. 2002).

By modeling the outer parts of disks around quasi-stellar objects (QSOs) as steady, viscous, geometrically thin, and optically thick, Goodman (2003) has argued that they are self-gravitating. More precisely, he predicts self–gravitational instabilities to develop beyond about 10^{-2} parsecs from the central object. In addition, it has been suggested by Menou & Quataert (2001) that self-gravitating regions of disks around QSOs are likely to be coupled to a magnetic field.

The stability of a thin, self-gravitating gas disk is controlled by the Toomre Q parameter (Toomre 1964):

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma}, \qquad (1)$$

where c_s is the sound speed, κ is the epicyclic frequency (see, e.g., Binney & Tremaine 1987), Σ is the disk surface mass density and G is the gravitational constant. Gaseous disks are unstable against axisymmetric perturbations when $Q \leq 1$, and against non-axisymmetric perturbations when $Q \gtrsim 1$.

Since analytical predictions of the nonlinear evolution of gravitational instabilities are difficult, there have been a large number of numerical simulations of gravitationally unstable disks. Despite the rather daunting technical problems of combining three-dimensional (3D) hydrodynamic calculations with rapid and accurate Poisson equation solvers, significant progress have been made. To do so, the energetics must be treated crudely, with the focus squarely on purely dynamical behavior. Using this strategy, the above Q criterion for instability has been confirmed (and shown to still be approximately valid for disks of finite thickness), and the properties of the unstable modes have been studied as a function of the disk parameters (Tohline & Hachisu 1990; Woodward et al. 1994). Several authors have investigated the saturation properties of the instability, and have shown that it is capable of transporting significant amount of mass and angular momentum in a few orbital times (Papaloizou & Savonije 1991; Laughlin & Bodenheimer 1994; Pickett et al. 1996; Laughlin et al. 1997). The first calculations mostly used simple adiabatic equations of state (EOS). More recently, isothermal disks have also been studied (Pickett et al. 1998, 2000; Boss 1998; Mayer et al. 2002). Some new investigations also include a simplified treatment of the disk radiative cooling (Pickett et al. 2003; Rice et al. 2003; Boss 2002).

All these models were purely hydrodynamical, and neglected the effect of magnetic fields. However, it is known that stability of astrophysical disks is extremely sensitive to the presence of weak magnetic fields. In particular, the

[1] Institut d'Astrophysique de Paris, 98Bis Bd Arago, 75014 Paris, France
[2] Virginia Institute of Theoretical Astronomy, Department of Astronomy, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903–0818, USA
[3] Laboratoire de Radioastronomie, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
[4] Université Denis Diderot–Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5, France

magnetorotational instability (MRI) completely disrupts laminar Keplerian flow when a subthermal magnetic field of any geometry is present. This was first understood by Balbus & Hawley (1991). Since then, it has been shown through many numerical simulations that the nonlinear outcome of the MRI is MHD turbulence, which, in common with gravitational instabilities, transports angular momentum outward (see Balbus & Hawley 1998, or Balbus 2003, for a review). Since disks around low–mass stars and around QSOs may be both magnetized and self–gravitating, the spiral structure gravitational transport described above must somehow develop in a medium in the throes of MHD turbulence.

The question naturally arises as to how these two powerful instabilities interact with one another. What is the ultimate effect on the global properties of accretion disks, and in particular, on the critical transport properties of mass and angular momentum? To keep this initial investigation tractable, we must restrict ourselves here to an adiabatic EOS. But the dynamical behavior of "simple" adiabatic disks is still rich, and contains unanticipated findings. In a companion paper to this one (Fromang et al. 2004, hereafter paper I), we carried out 2D axisymmetric numerical simulations of the evolution of massive and magnetized disks. The results show that the MRI behaves in a self–gravitating environment as it does in zero mass disks. Turbulent transport of angular momentum causes the disk to evolve toward a two component structure: (1) an inner thin disk in Keplerian rotation fed by (2) an outer thick disk whose rotation profile deviates from Keplerian, strongly influenced by self-gravity. However, angular momentum transport by gravitational instabilities cannot develop in axisymmetric simulations, which leaves unanswered the question of the outcome of the interaction between both instabilities. This is the subject of the present paper.

The plan of the paper is as follows: in section 2, we present our numerical methods. The initial state of our simulations will be described in section 3. We present our results in section 4 and, finally, give our conclusions in section 5.

2. NUMERICAL METHODS

2.1. *Algorithms*

The calculations in this paper are based on the equations of ideal MHD:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{\nabla}\mathbf{v}\right) = -\mathbf{\nabla}P - \rho\mathbf{\nabla}\Phi + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{\nabla}\right)\left(\frac{e}{\rho}\right) = -P\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \quad (5)$$

where ρ is the mass density, e is the energy density, $\mathbf{v}$ is the fluid velocity, $\mathbf{B}$ is the magnetic field, P is the gas pressure and $\Phi = \Phi_s + \Phi_c$ is the total gravitational potential, which has contributions Φ_s from the disk self–gravity and Φ_c from a central mass. The Poisson equation determines the gravitational potential,

$$\nabla^2\Phi_s = 4\pi G\rho, \quad (6)$$

and to close our system of equations, we adopt an adiabatic equation of state for a monoatomic gas:

$$P = (\gamma - 1)e, \quad \gamma = 5/3. \quad (7)$$

To solve these equations, we use the GLOBAL code (Hawley & Stone 1995). This uses standard cylindrical coordinates (r, ϕ, z) and time–explicit Eulerian finite differences. The magnetic field is evolved using the combined Method of Characteristics and Constrained Transport algorithm (MOC–CT), which preserves the divergence of the magnetic field to machine accuracy. Finally, we use outflow boundary conditions in the radial and vertical directions, and periodic boundary conditions in ϕ.

In its original form, GLOBAL did not include a Poisson solver, and the development of such a routine represents a major technical component of the results we report here. The calculation is done in two steps. The potential Φ_s is first computed at the grid boundary, using the spectral decomposition decribed below, and then calculated on the whole grid using a very rapid method. It is the first step, the boundary calculation, that is computationally expensive.

In the expansion of Φ_s, we have adopted the method of Cohl & Tohline (1999), which uses half–integer Legendre functions in the Green's function. This method is better suited to cylindrical coordinates than the traditional expansion in spherical harmonics, which are of course tailored to spherical coordinates. Following Cohl & Tohline (1999), Φ_s may be written

$$\Phi_s(r,\phi,z) = -\frac{G}{\pi\sqrt{r}}\int_V d\tau' \, \frac{\rho(r',\phi',z')}{\sqrt{r'}}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \, Q_{m-1/2}(\chi)\cos m(\phi-\phi') \, . \quad (8)$$

Here, $d\tau' = r'dr'd\phi'dz'$ is the elementary volume element, and the integral is taken over the whole computational domain. $Q_{m-1/2}$ denotes the half–integer order Legendre function of the second type (Abramowitz & Stegun 1965). The argument χ is a function of position:

$$\chi = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'} \, . \quad (9)$$

The Legendre functions are computed once at the beginning of each simulation and stored in memory. At each time step, we calculate Φ_s using equation (8), in which the sum over m is truncated at some upper value m_{max}. We then calculate Φ_s everywhere on the grid, using a combination of a Fourier transform in ϕ and the 2D Successive Over Relaxation (SOR) Method (Hirsch 1988) in the (r, z) plane. Although this is an efficient method, the calculation of the self–gravitating potential is still very demanding of computational resources. For the resolution $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 64, 128)$ used in this paper, the time required by the Poisson solver still represents $\sim 40\%$ of the computation time for $m_{max} = 8$.

2.2. *Diagnostics*

We introduce and define some key quantities that have been used to analyze the results of the simulations. We denote the ratio of the volume averaged thermal pressure to the volume averaged magnetic pressure as $\langle\beta\rangle$:

$$\langle\beta\rangle = \frac{\langle P\rangle}{\langle B^2/8\pi\rangle} . \tag{10}$$

This parameter is used primarily as a measure of the initial magnetic field strength.

In 3D numerical simulations of magnetized self–gravitating disks, angular momentum is transported by the sum of the Maxwell, Reynolds, and gravitational stress tensors. Following Balbus & Papaloizou (1999) and Hawley (2000), we define the height and azimuthal averages (noted with an overbar) of each these respective stresses as:

$$T_{r\phi}^{Max}(r,t) = -\frac{\overline{B_r B_\phi}}{4\pi} , \tag{11}$$

$$T_{r\phi}^{Ren}(r,t) = \overline{\rho v_r v_\phi} - \frac{\overline{\rho v_r}\ \overline{\rho v_\phi}}{\overline{\rho}} , \tag{12}$$

$$T_{r\phi}^{grav}(r,t) = \frac{1}{4\pi G}\overline{\frac{\partial\Phi_s}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_s}{\partial\theta}} . \tag{13}$$

As in paper I, volume averages of these quantities will be denoted as $\langle T_{r\phi}^{Max}\rangle(t)$, etc. Note that $T_{r\phi}^{grav}$ is associated with the gravitational torque resulting from non-axisymmetric disk structure. This quantity clear vanishes in an axisymmetric simulation ($m_{max} = 0$). In this case, the standard α parameter (Shakura & Sunyaev 1973) can be defined as the sum of the Maxwell and Reynolds stress tensors normalized by the gas pressure:

$$\alpha(r,t) = \frac{T_{r\phi}^{Max}(r,t) + T_{r\phi}^{Ren}(r,t)}{\overline{P(r,t)}} . \tag{14}$$

3. INITIAL MODEL

We start our simulations with a disk model which is as close as possible to hydrostatic equilibrium:

$$-\boldsymbol{\nabla} P - \rho\boldsymbol{\nabla}(\Phi_s + \Phi_c) + \rho r\Omega^2 \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0} . \tag{15}$$

Here Ω is the angular velocity and $\boldsymbol{e_r}$ is the unit vector in the radial direction. The coordinate system has its origin on the disk center. The potential Φ_c is due to a central mass M_c. We chose $M_c = 2M_d$, where M_d is the disk mass. The initial disk model is gravitationally unstable.

Because of the presence of the disk self–gravity, equation (15) has to be solved iteratively. We use the Self–Consistent Field (SCF) iterative method developed by Hachisu (1986). In this method, the radial profile of the angular velocity Ω or, equivalently, the specific angular momentum $j = r^2\Omega$, is specified. Following Pickett et al. (1996), we fix $j(r)$:

$$j = j_{r0}\left(\frac{M_r + M_c}{M_d + M_c}\right)^q \tag{16}$$

where j_{r0} and q are constant, and M_r is the disk mass within radius r. Setting $q = 2$ gives a j profile close to that used by Pickett et al. (1996). We begin the iteration with an arbitrary mass density ρ, from which we can calculate Φ_s. From ρ and the above expression for j we also calculate Ω (note that it still depends on the constant j_{r0}). The relation (15) is then integrated to give the value of the enthalpy h:

$$h = \frac{5}{2}K\rho^{2/3} = C - (\Phi_s + \Phi_c) + \int r\Omega^2 dr , \tag{17}$$

where the constant C and j_{r0} are determined from the boundary conditions $\rho = 0$ at $(r = R_{in}, z = 0)$ and at $(r = R_{out}, z = 0)$. Here R_{in} and R_{out} are the radial boundaries of the disk. The new density field is then calculated from h using the normalizing condition that $\rho_{max} = 1$, which determines the polytropic constant K. Upon iterating this procedure, we converge to a model very close to equilibrium.

The resulting disk model (with $R_{in} = 0.25$ and $R_{out} = 1$) has an Ω profile close to Keplerian and a density profile displayed in figure 1. Note that the disk is rather thin, with an aspect ratio H/r varying between 0.1 and 0.2.

As noted above, the ratio M_c/M_d is chosen in such a way that the Toomre Q parameter is initially close to unity. The radial profile of Q in the initial disk model is shown in figure 2. The minimum value of Q is approximately 1.1, and Q is close to unity over a large range of radii. We therefore expect strong non–axisymmetric gravitational instabilities to develop in this disk.

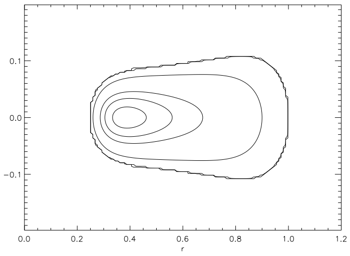

FIG. 1.— Density contours in the (r, z)–plane of the initial disk model used in all the simulations. The contours shown are $\rho = 10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.1, 0.5, 0.7$ and 0.9. The disk radial boundaries are $R_{in} = 0.25$ and $R_{out} = 1$. The central mass is twice that of the disk.

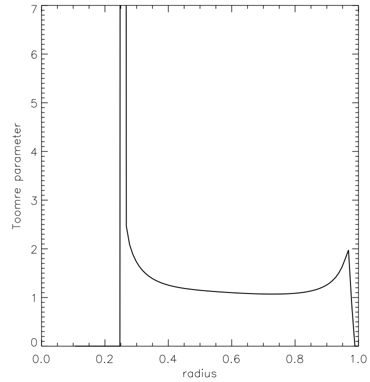

FIG. 2.— Radial profile of the Toomre Q parameter in the initial disk model. Q is close to unity over a large range of radii.

4. RESULTS

Table 1 lists the parameters of the different runs we present below. Column 1 gives the label of the model.

Model	ϕ–range	m_{max}	$\langle\beta\rangle$	Resolution
HD	$[0,\pi]$	8	∞	$(128,64,64)$
T1	$[0,\pi/2]$	0	8	$(128,32,128)$
T2	$[0,\pi]$	8	8	$(128,64,128)$
T2$_{low}$	$[0,\pi]$	8	8	$(64,64,64)$
T2*	$[0,\pi]$	0–8†	8	$(128,64,128)$
T3	$[0,\pi]$	16	8	$(128,64,128)$
P1	$[0,\pi/2]$	0	300	$(128,32,128)$
P2	$[0,\pi]$	8	300	$(128,64,128)$

† For this run, $m_{max} = 0$ when $t \in [0, 5.8]$, while $m_{max} = 8$ for $t > 5.8$.

TABLE 1
MODEL PARAMETERS. COLUMN 2 GIVES THE COMPUTATIONAL AZIMUTHAL DOMAIN, COLUMN 3 GIVES THE HIGHEST FOURIER COMPONENT OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL INCLUDED IN THE CALCULATION, COLUMN 4 GIVES THE RATIO OF THE VOLUME AVERAGED THERMAL AND MAGNETIC PRESSURES AND COLUMN 5 GIVES THE RESOLUTION (N_r, N_ϕ, N_z) OF THE RUN. MODEL HD IS HYDRODYNAMICAL. MODELS T AND P START WITH A PURELY TOROIDAL AND POLOIDAL MAGNETIC FIELD, RESPECTIVELY. WHEN $m_{max} = 0$, THE DISK SELF–GRAVITATING POTENTIAL IS FORCED TO STAY AXISYMMETRIC. IN MODEL T2*, $m_{max} = 0$ AT THE BEGINNING OF THE RUN AND IS SET TO 8 AFTER A FEW ORBITS.

HD refers to a hydrodynamical run. Models T and P start with a purely toroidal and poloidal magnetic field, respectively. Column 2 gives the computational azimuthal domain and column 3 gives the highest fourier component of the gravitational potential. When $m_{max} = 0$, i.e. when only the $m = 0$ component in the Fourier expansion of Φ_s is included, gravitational instabilities cannot develop (recall that $Q > 1$, so that the disk is stable against axisymmetric perturbations). Therefore, models T1 and P1 enable us to study the evolution of MHD turbulence and to compare it with previous work and with the 2D simulations of paper I. In models T2, T2$_{low}$, T2*, T3 and P2, both gravitational and magnetic instabilities develop. In model T2*, the non–axisymmetric part of Φ_s is included only after 6 orbits, i.e. after MHD turbulence has established itself. Column 4 gives the ratio of the volume-averaged thermal and magnetic pressures and column 5 gives the resolution (N_r, N_ϕ, N_z) of the run.

In all the models, an adiabatic equation of state is used. The computational domain extends radially from 0.1 to 1.4, and vertically from -0.2 to 0.2. In the azimuthal direction, the computational domain extends from 0 to either $\pi/2$ or π. The smaller range is used in the $m_{max} = 0$ gravitationally stable cases. Indeed, Hawley (2000) and Papaloizou & Nelson (2003) have shown that an azimuthal domain of $\pi/3$ is generally sufficient to describe the transport properties of MHD turbulence. When we allow for the development of gravitational instabilities, we restrict the azimuthal domain to the half disk $[0, \pi]$. This saves computational time, but of course allows only even modes to develop. The focus of the paper is not on the detailed spectrum of modes which appear in a given disk model, however, but on the interaction between MHD turbulence and the largest scale gravitational modes. This interaction should not be particularly sensitive to whether an integer number of modes exactly fits in the half disk.

Time is measured in units of the orbital period at the initial outer edge $R_{out} = 1$ of the disk model. Typical simulations are carried out for 8 to 10 orbits at this position. This corresponds to 60–80 orbits at the initial disk inner edge. The simulations are seeded by adding to the mass density at $r > 0.4$ random perturbations with a relative amplitude of 5×10^{-3}.

We now describe in turn the hydrodynamical run, the simulations with only MHD turbulence, and the runs with both gravitational and magnetic instabilities.

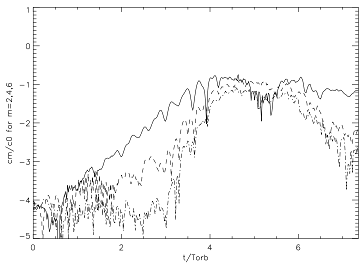

FIG. 3.— Time evolution of the Fourier components of the density in the equatorial plane for model HD. The y–axis represents the ratio of the amplitude of the m–th Fourier component of the perturbed density to the unperturbed density. From top to bottom, the different curves correspond to the modes $m = 2$ (*solid line*), $m = 4$ (*dashed line*) and $m = 6$ (*dotted-dashed line*).

4.1. *Control Hydrodynamical Run: Model HD*

The time evolution of the Fourier components of the density in the equatorial plane is shown in figure 3 for the modes $m = 2, 4$ and 6 (from top to bottom). The $m = 2$ mode grows at the beginning of the simulation and saturates after 4 orbits. Higher m modes emerge after about 3 orbits. Apart from the $m = 4$ mode, which may also be linearly unstable, the $m > 2$ modes appear to be non–linearly excited.

The development of a $m = 2$ spiral structure may be seen in figure 4, which shows the logarithm of the density in the equatorial plane at $t = 4.27$. (Note that the result of the simulation has been extended by symmetry to cover the range $[0, 2\pi]$). This mode is clearly global. Its pattern speed is $\Omega_p = 6.28$, which means that corotation (the radius where the gas angular velocity matches the pattern speed) is located at the initial outer edge of the disk. Such a mode is predicted to emerge by linear stability analyses of self-gravitating disks (Papaloizou & Savonije 1991). The instability is due to the interaction between waves that propagate near the outer boundary and waves that reside inside the inner Lindblad resonance (where the pattern speed in the frame corotating with the planet matches the gas epicyclic frequency). This is located at $r \sim 0.6$ in our disk model.

During the simulation, matter is driven toward the disk center by the gravitational torque associated with the spiral arms and, at $t \simeq 8$, Q has become sufficiently high ($\gtrsim$2) that the disk settles into a stable state. The results of this simulation are in agreement with theoretical expectations and with previous work, and show that the Poisson solver performs satisfactorily in the hydrodynamical regime.

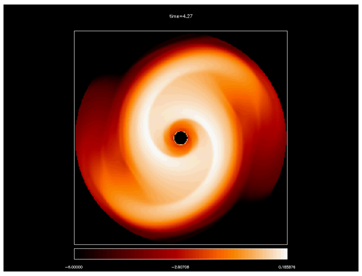

FIG. 4.— Logarithm of the density in the equatorial plane for model HD at $t = 4.27$. The linearly unstable two–arm global mode has become non–linear. It drives angular momentum outward and matter toward the central point mass.

4.2. *MHD Simulations in an Axisymmetric Gravitational Potential*

In the presence of a weak magnetic field, we expect our disk model to be unstable to the MRI, regardless of the field geometry. We first perform simulations in which only the MRI develops (models T1 and P1). This allows the properties of the ensuing MHD turbulence to be quantified and compared with previous work. To prevent the growth of non–axisymmetric gravitational instabilities, we retain only the $m = 0$ component in the Fourier expansion of Φ_s. The resolution is $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 32, 128)$ and the azimuthal domain extends from 0 to $\pi/2$, which would be equivalent to a resolution of 128^3 over a range of 2π.

4.2.1. *Initial toroidal field: Model T1*

We add to the equilibrium disk model described above a $\langle\beta\rangle = 8$ toroidal magnetic field and run the simulation for about 10 orbits (about 80 orbits at the initial disk inner edge).

Figure 5 shows the time evolution of the volume-averaged Maxwell and Reynolds stress tensors and the corresponding α parameter (see eq. [14]). The Maxwell stress increases during the linear phase of the instability. It then saturates after 4 orbits, when the MRI breaks down into turbulence. The presence of turbulence is seen in figure 6, which shows the density perturbation in the equatorial plane at $t = 6.4$. Turbulent fluctuations are present over the full extent of the disk. It is clear from figure 5 that the Reynolds stress is significantly smaller than the Maxwell stress over the course of the simulation. This is in agreement with previous non self–gravitating global simulations of the MRI (Hawley 2000, 2001; Steinacker & Papaloizou 2002). The right panel of figure 5 shows the radial profile of α at the end of the simulation, i.e. at $t \simeq 10$. The typical value of α is a few times 10^{-2}, similar to what was found in previous simulations starting with a toroidal field with a net flux (Steinacker & Papaloizou 2002).

The Maxwell stress stays roughly constant during our simulation. This indicates that the resolution $(128, 32, 128)$ is large enough for the turbulence to be sustained over the duration of the run. We therefore adopt it in the following runs (which of necessity are limited in time by the fact that mass is accreted onto the central mass).

4.2.2. *Initial poloidal field: Model P1*

To investigate the sensitivity of our results to the initial field geometry, we run the same calculation as in model T1 but with an initial poloidal magnetic field. We calculate the field from the (toroidal) component of the vector potential in the initial disk model:

$$A_\phi \propto \rho \cos\left(8\pi \frac{r - R_{in}}{R_{out} - R_{in}}\right) . \tag{18}$$

This corresponds to 4 magnetic loops confined inside the disk. The first 2D simulations of a disk permeated by a weak vertical field (Hawley & Balbus 1991) showed the development and growth of “channel” solutions. In 3D, these solutions still exist but they quickly break down into turbulence, as predicted by the analysis of Goodman & Xu (1994). Turbulence is more rapidly established when the field varies on a fairly small scale, which motivates the above choice of A_ϕ.

The radial and vertical components of the magnetic field are computed from A_ϕ and normalized such as to obtain the desired initial value of $\langle\beta\rangle$. Since the linear growth of the vertical field is much more rapid than that of the toroidal field (see below), we chose a much larger initial value of $\langle\beta\rangle = 300$.

The properties of the turbulence are similar to those found when the initial field is toroidal. Figure 7 shows the time evolution of the Maxwell stress for both models T1 and P1. As expected, the linear instability is much more vigorous when a vertical field is present, because of the growth of the channel solutions. However, in both cases the stress saturates at a similar value and the level of turbulence is comparable. The evolution of the Maxwell stress in P1 is somewhat similar to what was obtained in paper I. The important difference is that in 3D, the stress saturates when turbulence is established and does not decay with time, as it does in 2D.

4.3. *Full MHD simulations*

In this section we report the results of full 3D simulations including the development of both self-gravitational and magnetic instabilities. The resolution is $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 64, 128)$ and the azimuthal domain extends from 0 to π.

4.3.1. *Initial Toroidal Field: Models T2, T2* and T3*

In this sequence of models, we observe the simultaneous appearance of both MHD turbulence and the $m = 2$ spiral arm familiar from the hydrodynamical calculation. To better understand how angular momentum is transported in the disk, we compare the time evolution of the different stresses with those obtained in the models described in the previous section.

Figure 8 shows the gravitational stress $\langle T^{grav}_{r\phi}\rangle$ as a function of time for both models T2 and HD. Somewhat surprisingly, the presence of both gravitational and MHD instabilities leads to an average $\langle T^{grav}_{r\phi}\rangle$ reduced by a factor ~ 2 compared with the values obtained without a magnetic field. The magnetic torques do not lead to more vigorous gravitational instability. One possible explanation may be that turbulent motions tend to broaden the spiral arms by adding an extra fluctuating component to the thermal pressure, but there is more going on just

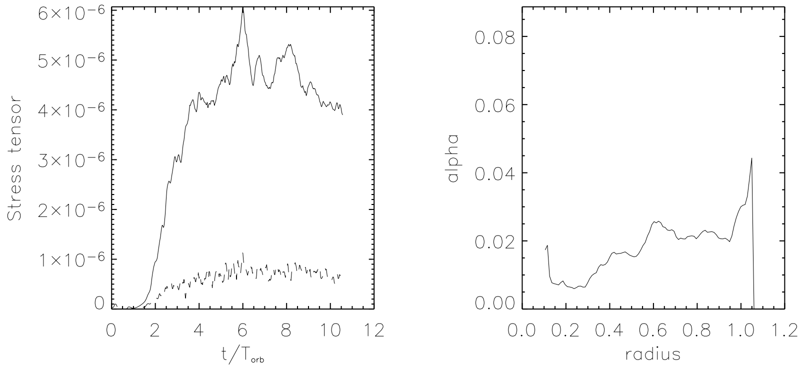

FIG. 5.— ***Left panel:*** Time evolution of the volume averaged Maxwell (***solid line***) and Reynolds (***dashed line***) stress tensors for model T1. The Maxwell stress increases during the linear growth of the MRI (first 4 orbits). It then saturates when the instability breaks down into turbulence and stays roughly constant. At all time, the Reynolds stress is much smaller than its magnetic counterpart. ***Right panel:*** α vs. r at the end of the simulation, i.e. at $t \simeq 10$. The typical value of α is a few times 10^{-2}.

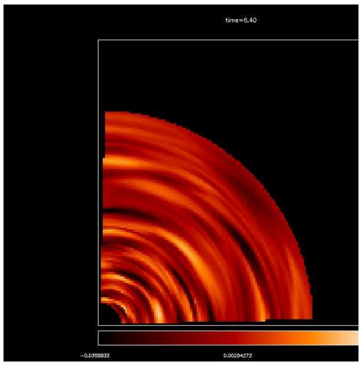

FIG. 6.— Density perturbation in the equatorial plane for run T1 at $t = 6.4$. Turbulent fluctuations are present over the whole extent of the disk.

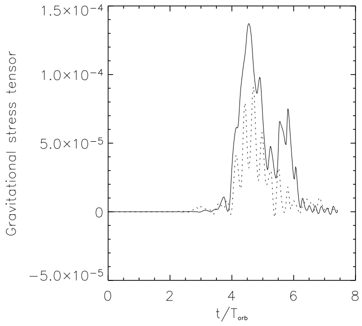

FIG. 8.— Time evolution of the volume averaged gravitational stress tensor $\langle T^{grav}_{r\phi} \rangle$ for models HD (***solid line***) and T2 (***dotted line***). The level of transport by gravitational instabilities is significantly reduced when MHD turbulence is present. In model T2, the gravitational stress also varies periodically.

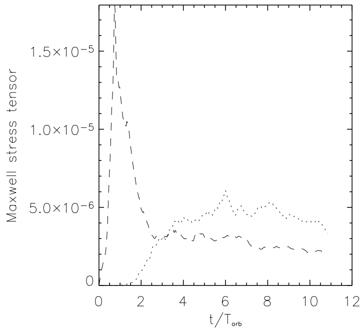

FIG. 7.— Time history of the volume averaged Maxwell stress tensor for runs P1 (***dashed line***) and T1 (***dotted line***). The linear instability is more vigorous when a vertical field is present, but the level of turbulence is similar in both cases.

this. Figure 8 also shows that the gravitational stress varies nearly periodically with time and can reach very small values. This behavior is in fact associated with the near disappearance of the spiral arms, as can be seen in figure 9. These snapshots correspond to a maximum and a minimum of the gravitational stress, respectively. The spiral arms are sharp at $t = 4.95$, whereas they lack definition at $t = 5.09$. The arms form, disperse, and reform. This periodic variation is also seen in figure 10, which shows the mass accretion rate onto the central mass as a function of time. As expected, the accretion rate has a periodic component with the same frequency as that found in the gravitational stress. The period in both cases is ~ 0.28.

In figure 11, we compare the evolution of the Maxwell stress in models T2 and T2* (for which only the first 6 orbits, during which $m_{max} = 0$, are plotted). In contrast to the gravitational stress, the Maxwell stress is significantly larger when the disk is gravitationally unstable. This appears to be due to the systematic compression of the magnetic field lines along the spiral arms, as opposed, say, to an increase of the level of turbulent fluctuations. When the gravitational instability disappears after about 7 orbits in model T2, for example, the Maxwell stress de-

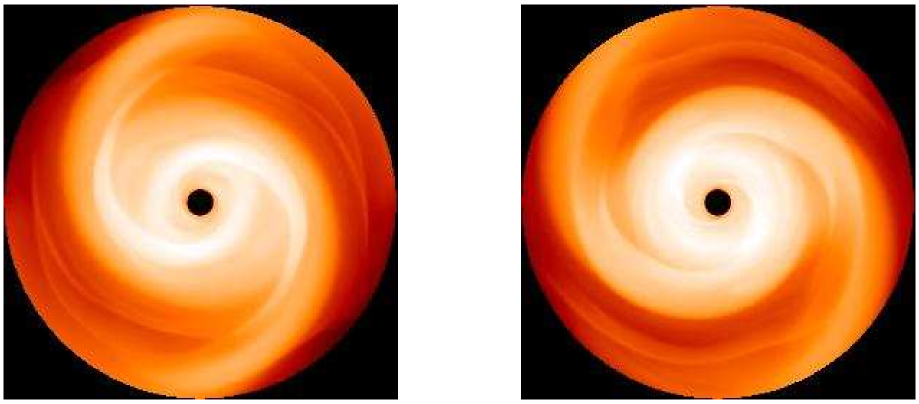

FIG. 9.— Logarithm of the density in the equatorial plane for run T2 at $t = 4.95$ (*left panel*) and $t = 5.09$ (*right panel*). These snapshots correspond to a maximum and a minimum of the gravitational stress, respectively. The spiral arms are sharp and clear at $t = 4.95$, whereas they appear blurred at $t = 5.09$.

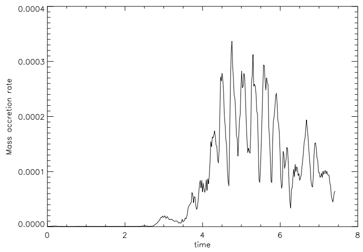

FIG. 10.— Time evolution of the mass accretion rate (mass per unit of time) onto the central mass for run T2. As expected, the accretion rate oscillates with the same period as the gravitational stress.

creases to the same value as in model T2*.

As in the hydro model HD, the Toomre Q parameter rises throughout the body of the disk over the course of the simulation (as mass is transported toward the inner region), until the gravitational instability ceases. But even by $t \simeq 8$, when there is no longer any gravitational transport, Q is still larger in model HD than in model T2. This is because the gravitational instability is stronger in the hydrodynamical case, and the disk is depleted more rapidly.

To check the sensitivity of these results to our choice of initial conditions, we conducted the following experiment. In model T2*, the input parameters are the same as in model T2, but the non–axisymmetric part of Φ_s is included only after 6 orbits, i.e. only after MHD turbulence has been firmly established. Figure 12 shows the time evolution of the volume averaged Maxwell and gravitational stress tensors for run T2*. Until $t = 7$, the development of MHD turbulence is the same as in model T1. However, in the time interval $t = 7$–8, i.e. after gravitational instabilities have developed, $\langle T_{r\phi}^{Max} \rangle$ decreases to reach about one third of its value at $t = 7$. The reason of this decline is not completely clear. One possibility may be that the compression of the (randomized) magnetic field in the spiral arms leads to more effi-

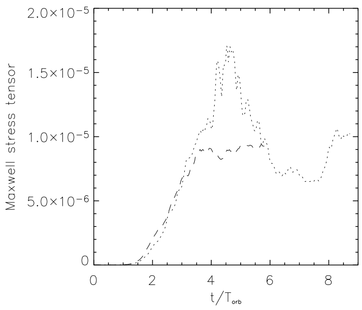

FIG. 11.— Time evolution of the volume averaged Maxwell stress tensor for runs T2* (*dashed line*), before gravitational transport is turned on, and T2 (*dotted line*). The Maxwell stress is larger when the disk is gravitationally unstable. This appears to be due to a compression of the magnetic field lines along the spiral arms. When the disk in model T2 becomes gravitationally stable (after $t \simeq 7$), the Maxwell stress decreases down to the same value as in model T2*.

cient reconnection of the field lines. Another possibility is that gravitational stresses feed off the density fluctuations generated by the MRI, thereby indirectly coupling the magnetic and gravitational energies. In any case, this behavior stands in contrast with was observed in run T2, where gravitational instabilities developed while the magnetic field was still ordered. In model T2*, the gravitational stress tensor is roughly a factor of 2 smaller than in model T2, but shows the same periodic variations.

Our next comparison run, model T3, differs from model T2 only in the number m_{max} of fourier coefficients in the expansion of Φ_s. (T3 has $m_{max} = 16$, T2 has $m_{max} = 8$.) Once again, very similar results emerge, and the choice of m_{max} does not appear to be critical (cf. § 4.3.3).

To summarize: the evolution of a purely toroidal field in a gravitationally unstable disk leads to a reduction and strong periodicity in the gravitational stress (com-

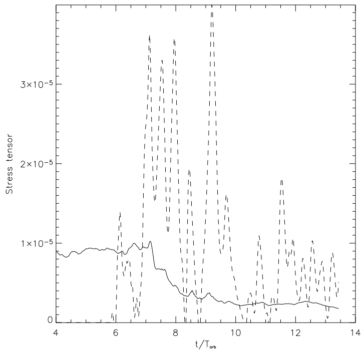

FIG. 12.— Time evolution of the volume averaged Maxwell (*solid line*) and gravitational (*dashed line*) stress tensors for run T2*. In this run, the non–axisymmetric part of Φ_s is included only after 6 orbits, i.e. only after MHD turbulence has been firmly established. The development of gravitational instabilities coincides with a significant decrease of the Maxwell stress tensor. This may be due to reconnection of the (randomly oriented) field lines in the spiral arms. The gravitational stress tensor has the same amplitude and periodic variations as in run T2.

pared with a purely hydrodynamical model). Compared with gravitationally stable models, the Maxwell stress is larger or smaller depending repsectively on whether gravitational instabilities develop at the same time as MHD turbulence (magnetic field alignment in spiral arms) or after turbulence is established (reduction in magnetic stress as gravitational stress develops). The behavior of an initial poloidal field is considered next.

4.3.2. *Initial Poloidal Field: Model P2*

Do our toroidal field findings extend to poloidal field behavior? To answer this question, we begin with an initial poloidal field, calculated as in section 4.2.2 above. Again, we start with $\langle\beta\rangle = 300$. Except for the initial field geometry, model P2 is the same as model T2.

Figure 13 shows the evolution of the gravitational stress tensor for both models P2 and HD (this is the equivalent of figure 8). As in the case of a toroidal field, a non–axisymmetric $m = 2$ spiral grows and becomes nonlinear in model P2. The fact that gravitational instabilities develop earlier in model P2 than in models T2 and HD (see figures 8 and 13) appears to be due to the fact that the strong linear magnetic instability associated with the poloidal field produces large perturbations of the density. Once again, we find that the gravitational stress is smaller than in model HD, and varies periodically with time with a period ~ 0.38 somewhat larger than for model P2.

Figure 14 shows the evolution of the Maxwell stress for models P1 and P2 (this is the equivalent of figure 11). Once again, the Maxwell stress is larger when the disk is gravitationally unstable and gravitational instabilities develop at the beginning of the run (model P2).

Since the state of MHD turbulence in a saturated disk is the same whether an initial poloidal or toroidal field is used, we have not run a case "P2*" with the non–axisymmetric part of Φ_s added later. Such a run is expected to be very similar to T2*, since the initial turbulent states are similar.

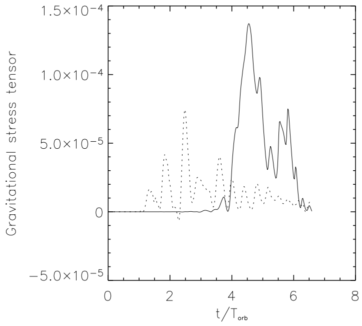

FIG. 13.— Time evolution of the volume averaged gravitational stress tensor for models HD (*solid line*) and P2 (*dotted line*). The gravitational stress in model P2 is smaller than in model HD and varies periodically with time.

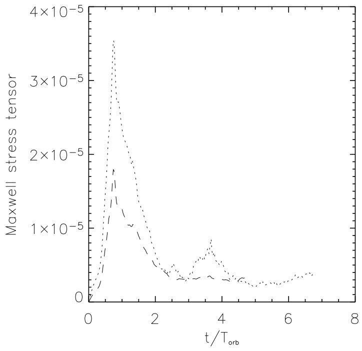

FIG. 14.— Time evolution of the volume averaged Maxwell stress tensor for models P1 (*dashed line*) and P2 (*dotted line*). The Maxwell stress is larger when the disk is gravitationally unstable and gravitational instabilities develop at the beginning of the run.

The history of run P2 and the above argument together suggest that toroidal and poloidal initial fields behave very similarly.

4.3.3. *Modal analysis*

The full MHD simulations described above suggest that a general feature of the evolution of gravitationally unstable turbulent disks is a periodic modulation of the gravitational stress. To understand the reason for this modulation, we now analyse in more detail the unstable modes that appear in models HD, T2 and P2. We are in particular interested in determining the power spectrum as a function of mode frequency σ. Following Papaloizou & Savonije (1991), we Fourier transform in time at each radial zone r and at a fixed azimuth ϕ_0 the function $\rho(r, \phi_0, t)$. To get the spectral time evolution, we carry out each Fourier transform over a series of 4 distinct time intervals. The number of time-steps used in each time interval gives a finite frequency resolution $d\sigma/2\pi = 0.3$. The contours of constant power are then plotted as a function of frequency and radius for the various time intervals.

Figure 15 shows the contours for model HD. The different panels correspond to different time intervals. In

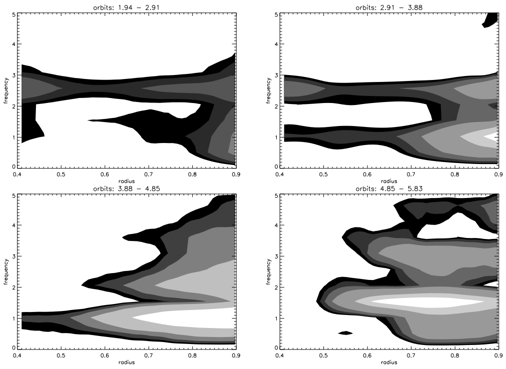

FIG. 15.— Contours of constant Fourier power as a function of dimensionless mode frequency $\sigma/2\pi$ (*vertical axis*) and radius r (*horizontal axis*) for model HD. The different panels correspond to the time intervals 1.94–2.91 (*upper left*), 2.91–3.88 (*upper right*), 3.88–4.85 (*lower left*) and 4.85–5.83 (*lower right*). The contour levels in each of these panels are, in unit 10^{-2}: (0.22; 0.29; 0.44; 0.87; 1.1; 1.6; 3.2), (2.1; 2.6; 3.4; 5.2; 10; 15), (8.4; 11; 14; 21; 42) and (9.4; 12; 16; 23; 47; 62), respectively. One mode (a two–arm spiral) dominates the spectrum in the non–linear stage (third panel), with a frequency $\sigma/2\pi = 1$.

the first panel, i.e. at time $t \simeq 2.4$, we see the presence of a mode with frequency $\sigma/2\pi = 2.5$ which extends over the whole disk. Its amplitude is small, peaking at about 3×10^{-2}. This mode is still present in the second panel, at time $t \simeq 3.4$, with a similar amplitude structure. However, a second low frequency mode with $\sigma/2\pi = 1$ (i.e. with a corotation radius at the disk initial outer edge) is now apparent. Its amplitude is significant only in the disk outer parts, where it peaks at 0.2. This mode subsequently grows and completely dominates the high frequency ($\sigma/2\pi = 2.5$) mode in the third panel, i.e. at $t \simeq 4.4$. There its amplitude peaks at 0.7. This mode can of course be identified with the two–arm spiral seen in figure 4. At $t = 4.4$ the mode is non–linear. Its amplitude does not increase further, as can be seen in the fourth and last panel, i.e. at $t \simeq 5.4$. At this later time, only the frequency of the mode has changed. It is now around 1.5. Both the finite frequency resolution $d\sigma$ and the increase of the central mass due to accretion may account for this shift in frequency. A third mode with a frequency twice that of the low frequency mode is seen in the last two panels. The relationship between the frequencies of these two modes and the fact that their radial structure is very similar suggests that they are harmonics of each other.

Figure 16 shows the contour plots for model T2. In the first panel, at $t \simeq 2.4$, there is no dominant mode. Instead, there is a large number of high frequency (with mostly $\sigma/2\pi = 1.3$–3.8) perturbations. The amplitude of these fluctuations is a few times 10^{-2}. They are associated with the growing MRI. In the second panel, at $t \simeq 3.4$, two modes emerge, but their amplitude is still rather low. However, these modes subsequently grow and are clearly seen with a larger amplitude in the third panel, at $t \simeq 4.4$. One of these modes has a frequency $\sigma/2\pi = 1$ and is the same as that seen in the hydrodynamical simulations. Its corotation radius is located

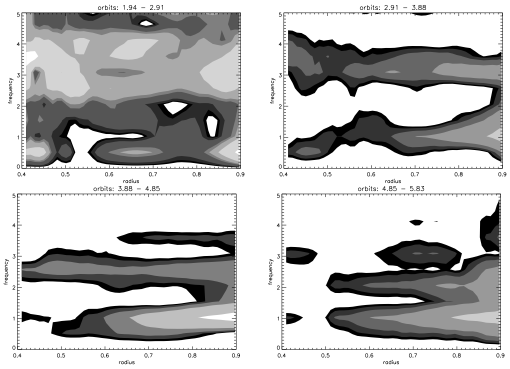

FIG. 16.— Same as figure 15 but for model T2. The contour levels in each panel are the same as in figure 15. Here two modes dominate the spectrum in the nonlinear phase (third panel), with frequencies $\sigma/2\pi = 1$ and $\sigma/2\pi = 2.5$, respectively.

at the disk initial outer edge. Its amplitude peaks at a value of about 0.5 in the outer parts of the disk. The other mode has a frequency $\sigma/2\pi = 2.5$ and an amplitude ~ 0.2 constant over the whole disk. In particular, its amplitude in the disk inner parts is larger than that of the other mode. This mode is probably the same as that seen with a lower amplitude at early times in the hydrodynamical simulations (panels 1 and 2 of figure 15). This suggests that this mode is a disk eigenmode which is excited in model T2 by the high frequency motions associated with the turbulence. We expect nonlinear coupling between these two modes to give rise to beat oscillations, i.e. oscillations with a frequency being a linear combination of the frequencies of the two modes. We have noted above that the gravitational stress tensor in model T2 oscillates with a period ~ 0.28. This is consistent with the frequency of the oscillations being $\sigma/2\pi \simeq m(\sigma_{\rm HF} - \sigma_{\rm BF}) = 3$, where $\sigma_{\rm HF}$ and $\sigma_{\rm BF}$ are the frequencies of the high and low–frequency modes, respectively. This suggests that the oscillations of the gravitational stress tensor result from a nonlinear coupling between these two modes.

Figure 17 shows the contour plots for model P2 in the time interval 2.72–3.88. the situation is similar to model T2. Here again two modes of comparable amplitude are present. One of this mode has a frequency $\sigma/2\pi = 1$ and can be identified with the mode which emerges in the hydrodynamical simulations. The other mode has a frequency $\sigma/2\pi = 2.1$. Given the finite frequency resolution $d\sigma/2\pi$, this second mode may be the same as that identified in model T2. However, it may also be a different mode with a lower frequency. In any case, the situation is qualitatively the same here as in model T2. Since the two modes have comparable amplitude, they interact nonlinearly, which results in a periodic modulation of the gravitational stress.

We now vary some of the parameters of model T2 in order to examine the sensitivity of these physical results to the numerical input parameters. Figure 18 shows the contour plots for model T2$_{low}$ in the time interval 2.72–3.88. The resolution for this run in the radial and vertical directions is half that of model T2. The similarity

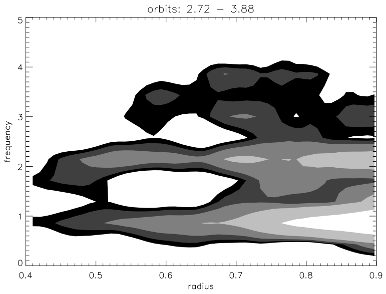

FIG. 17.— Same as figure 15 but for model P2 and only in the time interval 2.72–3.88. The contour levels used here are, in unit 10^{-2}: (5.1; 6.4; 8.5; 13; 25).

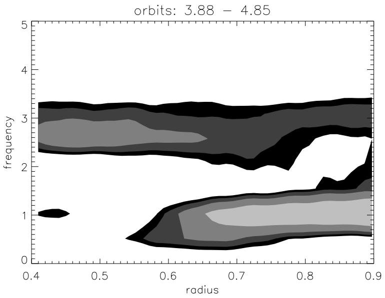

FIG. 19.— Same as figure 15 but for model T3 and only in the time interval 2.72–3.88. The contour levels used here are, in unit 10^{-2}: (5.1; 6.4; 8.5; 13; 25).

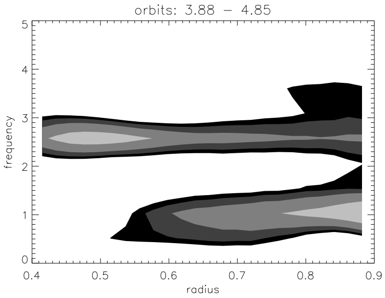

FIG. 18.— Same as figure 15 but for model $T2_{low}$ and only in the time interval 2.72–3.88. The contour levels used here are, in unit 10^{-2}: (5.1; 6.4; 8.5; 13; 25).

between this plot and the third panel of figure 16 demonstrates that our results do not depend strongly on the numerical resolution. Figure 19 is the same as figure 18 but for model T3. Again, it is very similar to the third panel of figure 16. Since, in model T3, only the parameter m_{max} is different from model T2, figure 19 suggests that the limited number of Fourier components included in the calculation of the self–gravitating potential does not qualitatively affect the main physical results presented in this paper.

In conclusion, models P2, $T2_{low}$ and T3, taken together, suggest that the physical results described in this paper are insensitive to both the numerical setup of the simulations and the initial magnetic field topology.

5. DISCUSSION

In this paper, we have presented the first 3D numerical simulations of the evolution of self–gravitating and magnetized disks. We have investigated disks in which only gravitational or magnetic instabilities develop, and disks in which both types of instabilities occur.

When no magnetic field is present, self–gravitating disks are unstable when the Toomre Q parameter is close to unity. The spectrum of unstable modes in that case is dominated by a large scale two–arm spiral whose corotation radius is located near the disk outer edge. The instability is due to the interaction between waves which propagate near the disk outer boundary and inside the inner Lindblad resonance (ILR), respectively (Papaloizou & Savonije 1991).

When a magnetic field is present, two large scale modes grow in the disk. They both have $m = 2$. One of this mode is the same as that seen in the hydrodynamical simulations. The second mode has a higher frequency. The ILR of the low–frequency mode, which is at $r \simeq 0.6$, is very close to the corotation radius of the high–frequency mode, which is at $r \simeq 0.5$. Such a pair of modes was seen in the hydrodynamical calculations of self–gravitating disks performed by Papaloizou & Savonije (1991). There, both modes were unstable because of the particular vortensity profile. In our simulations, in the absence of magnetic field, only the low–frequency mode is unstable. The high–frequency mode seems to be part of the spectrum of normal modes in that case, but it does not grow. The presence of MHD turbulence does not modify the spectrum of large scale (comparable to the disk radius) modes, as it acts on scales limited by the disk thickness. However, the fact that the high–frequency mode is unstable in the MHD simulations suggests that turbulence acts as a source for high–frequency oscillations.

Nonlinear coupling between these two modes leads to an oscillation of the gravitational stress tensor. Note that such a coupling between two modes with coinciding resonances has been suggested to explain some of the features seen in numerical simulations of galactic disks by Tagger et al. (1987). These authors argued that the proximity of the resonances made the coupling very efficient. The oscillation of the gravitational stress tensor is accompagnied by the periodic disappearance of the spiral arms in the disk. Also, the peak value of this stress is decreased by about half compared to the hydrodynamical simulations.

The results reported here are robust and do not depend on the geometry of the magnetic field. They have important consequences for disks around AGN and protoplanetary disks. They first show that accretion of a self–gravitating disk onto the central star is slowed down when a magnetic field is present. They also show that the accretion is time–dependent, with a characteristic timescale for the variability being on the order of a fraction of the dynamical timescale at the outer edge of the region where the instabilities develop.

As mentioned in the introduction, protoplanetary disks are probably self–gravitating in the early phases of their evolution. For a disk of about 100 AU, the work presented here suggests variability on a timescale $\sim 10^3$ years. The periodicity in the spatial distribution of knots in jets emanating from such objects is in the range 10–10^3 years (Reipurth 2000), and is usually thought of as being produced by a time–dependent accretion in the central parts of the disk. The simulations presented in this paper suggest that periodic modulations of the accretion rate might well be the result of the interplay between gravitational instabilities and MHD turbulence, a far from obvious source. Note that the first detection of near–IR variability in a sample of Class I protostars was performed recently by Park & Kenyon (2002). However, the poor time coverage of their data prevents a useful measure of the variability timescales to be extracted.

Disks around AGN display time–dependent phenomena on a large range of timescales (Ulrich et al. 1997). The dynamical timescale for a disk orbiting a 10^8 solar masses black hole at 10^{-2} parsecs is 9.3 years, and variations are observed on timescales up to years. This again is consistent with the processes described in this paper.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank John Hawley, John Papaloizou and Michel Tagger for useful discussions. SF thanks the Department of Astronomy at UVa for hospitality during the course of this work. SF is supported by a scholarship from the French *Ministère de l'Education Nationale et de la Recherche.* SF and CT acknowledge partial support from the European Community through the Research Training Network "The Origin of Planetary Systems" under contract number HPRN-CT-2002-00308, from the *Programme National de Planétologie* and from the *Programme National de Physique Stellaire.* The simulations presented in this paper were performed at the Institut du Développement et des Resources en Informatique Scientifique.

REFERENCES

Abramowitz, M., & Stegun, I. 1965, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (New York: Dover)
Balbus, S., & Hawley, J. 1991, ApJ, 376, 214
—. 1998, Rev.Mod.Phys., 70, 1
Balbus, S., & Papaloizou, J. 1999, ApJ, 521, 650
Balbus, S. A. 2003, ARA&A, 41, 555
Binney, J., & Tremaine, S. 1987, Galactic dynamics (Princeton University Press)
Boss, A. P. 1998, ApJ, 503, 923
Boss, A. P. 2002, ApJ, 576, 462
Cohl, H. S., & Tohline, J. E. 1999, ApJ, 527, 86
Fromang, S., Balbus, S. A., & De Villiers, J. P. 2004, ApJ, submitted (Paper I)
Fromang, S., Terquem, C., & Balbus, S. A. 2002, MNRAS, 329, 18
Gammie, C. F. 1996, ApJ, 457, 355
Goodman, J. 2003, MNRAS, 339, 937
Goodman, J., & Xu, G. 1994, ApJ, 432, 213
Hachisu, I. 1986, ApJS, 62, 461
Hawley, J., & Stone, J. 1995, Comput. Phys. Commun., 89, 127
Hawley, J. F. 2000, ApJ, 528, 462
—. 2001, ApJ, 554, 534
Hawley, J. F., & Balbus, S. A. 1991, ApJ, 376, 223
Hirsch, C. 1988, Numerical Computation of Internal and External Flows - Volume 1, Fundamentals of Numerical Discretization. (Wiley)
Laughlin, G., & Bodenheimer, P. 1994, ApJ, 436, 335
Laughlin, G., Korchagin, V., & Adams, F. 1997, ApJ, 477, 410
Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2002, Science, 298, 1756
Menou, K., & Quataert, E. 2001, ApJ, 552, 204
Papaloizou, J., & Nelson, R. 2003, MNRAS, 339, 983
Papaloizou, J., & Savonije, G. 1991, MNRAS, 248, 353
Pickett, B., Casse, P., Durisen, R., & Link, R. 1998, ApJ, 504, 468
Pickett, B., Cassen, P., Durisen, R., & Link, R. 2000, ApJ, 529, 1034
Pickett, B., Durisen, R., & Davis, G. 1996, ApJ, 458, 714
Pickett, B., Mejia, A., Durisen, R., Cassen, P., Berry, D., & Link, R. 2003, ApJ, 590, 1060
Reipurth, B. 2000, AJ, 120, 3177
Rice, W., Armitage, P., Bonnell, I., Bate, M., Jeffers, S., & Vine, S. G. 2003, MNRAS, 339, 1025
Sano, T., Miyama, S. M., Umebayashi, T., & Nakano, T. 2000, ApJ, 543, 486
Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, A&A, 24, 337
Steinacker, A., & Papaloizou, J. 2002, ApJ, 571, 413
Tagger, M., Sygnet, J. F., Athanassoula, E., & Pellat, R. 1987, ApJ, 318, L43
Tohline, J., & Hachisu, I. 1990, ApJ, 361, 394
Toomre, A. 1964, ApJ, 139, 1217
Ulrich, M., Maraschi, L., & Urry, C. M. 1997, ARA&A, 35, 445
Woodward, J. W., Tohline, J. E., & Hachisu, I. 1994, ApJ, 420, 247

Modèle	M_c/M_d	$j(r)$	m_{max}	$\langle\beta\rangle$	Résolution	Équation d'état
HDISO1	2	$j \propto m_r^2$	32	$+\infty$	$(128, 64, 128)$	isotherme
HDISO2	–	–	64	–	$(128, 128, 128)$	–
HDISO3	–	–	8	–	–	–
T2*	2	$j \propto m_r^2$	$0 - -8^\dagger$	8	$(128, 64, 128)$	adiabatique
T3*	–	–	0	–	$(128, 128, 128)$	–
TISO1	–	–	32	–	$(128, 64, 128)$	isotherme
TISO2	–	–	64	–	$(128, 128, 128)$	–

† Pour ce modèle $m_{max} = 0$ pour $t \in [0, 5.8]$, puis $m_{max} = 8$ pour $t > 5.8$.

TAB. 4.1 – *Paramètres des modèles présentés dans ce chapitre. La première colonne donne le nom du modèle, la seconde le rapport entre la masse centrale et la masse du disque. La troisième colonne précise le profil radial du moment cinétique du modèle initial. Les colonnes 4 et 5 donnent respectivement le nombre m_{max} de coefficients de Fourier inclus dans le calcul du potentiel gravitationnel du disque et la valeur $\langle\beta\rangle$ décrivant l'intensité moyenne du champ magnétique. Enfin, la sixième colonne précise la résolution (N_r, N_ϕ, N_z) de la simulation et la dernière colonne l'équation d'état utilisée.*

4.3 Évolution isotherme

Après le paragraphe précédent qui concernait le cas adiabatique, cette partie décrit les simulations pour lesquelles l'équation d'état est localement isotherme, ce qui signifie que la température dans chaque cellule de la grille est constante. Le tableau 4.1 présente les caractéristiques des divers modèles présentés dans la suite. La première colonne donne le nom du modèle. Les colonnes 2 et 3 décrivent les propriétés du modèle initial du disque, c'est à dire respectivement le rapport entre la masse centrale et celle du disque ainsi que le profil radial de moment cinétique. La colonne 4 donne le nombre m_{max} de coefficients de Fourier dont on tient compte dans le calcul du potentiel gravitationnel, tandis que la colonne 5 explicite la valeur initiale du rapport $\langle\beta\rangle$, moyenne volumique du rapport des pressions thermiques et magnétiques. Les simulations pour lesquelles $\langle\beta\rangle = +\infty$ sont hydrodynamiques, c'est à dire avec $B = 0$. Enfin, les deux dernières colonnes donnent la résolution (N_r, N_ϕ, N_z) utilisée et le type d'équation d'état. Seuls les modèles T2* et T3* utilisent une équation d'état adiabatique. Il sont mentionnés dans ce tableau car ils ont été utilisés pour initialiser les autres modèles. En effet, comme $m_{max} = 0$ dans ces deux simulations, la turbulence MHD se développe seule, sans instabilité gravitationnelle, et présente des propriétés stationnaires à l'instant $t = 5.8$. On change alors certaines de leurs caractéristiques et on redémarre ces simulations de disques turbulents avec d'autres paramètres. Par exemple, le modèle TISO1 est simplement la suite du modèle T2* mais l'équation d'état est localement isotherme, c'est à dire que la température est maintenue constante dans chaque zone de la grille à la valeur qu'elle avait à l'instant $t = 5.8$. Pour le modèle HDISO1, les champs magnétiques du modèle T2* sont mis à zéro et les fluctuations azimutales des variables scalaires et vectorielles sont moyennées. De plus, une perturbation aléatoire de densité est ajoutée

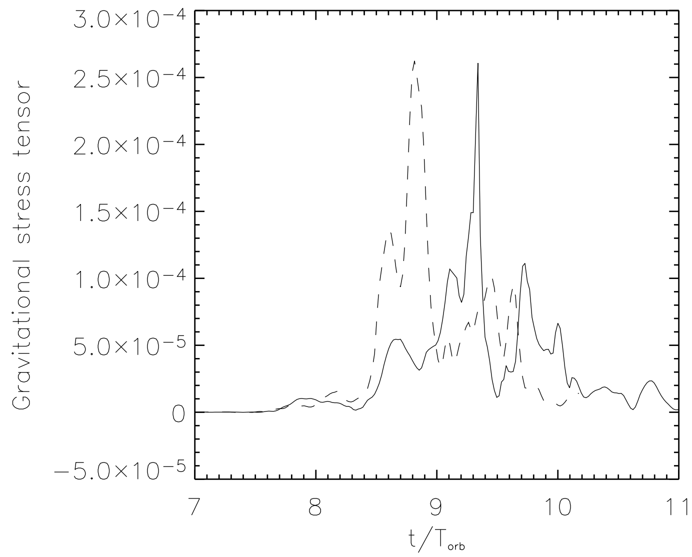

FIG. 4.16 – *Variation temporelle de la moyenne volumique du tenseur gravitationnel pour les modèles HDISO1 (traits tirets) et HDISO2 (trait plein). Malgré leur résolution différente, $\langle T_{r\phi}^{grav} \rangle(t)$ est du même ordre de grandeur dans les deux cas.*

avant de redémarrer la simulation. Ainsi, l'état initial de cette simulation est très proche de celui du modèle TISO1 et leur résultats peuvent être comparés directement. La même procédure est utilisée pour les modèles HDISO2, HDISO3 et TISO2 qui sont initialisés à partir de l'état final du modèle T3* à $t = 5.8$.

Pourquoi ne pas avoir commencé les simulations numériques isothermes avec l'état initial du disque présenté sur la figure 4.1 ? Dans ce modèle initial, les températures sont très faibles dans les parties de la grille où la densité est petite, c'est à dire autour du tore. Si ce modèle était utilisé dans une simulation localement isotherme dès l'instant $t = 0$, la température resterait très faible dans ces parties du domaine de calcul pendant toute la simulation. Tout le gaz transporté dans ces régions à cause des phénomènes de transport (magnétique ou gravitationnel) subirait un refroidissement brutal et important, ce qui pourrait conduire à sa fragmentation de manière irréaliste. L'utilisation préalable des modèles T2* et T3* permet de commencer les simulations avec une structure de disque plus réaliste, pour laquelle la température ne décroît jamais brutalement au passage d'une cellule de la grille à l'autre.

Enfin, tous les modèles décrits dans cette partie utilisent le même domaine de calcul : $r \in [0.1, 1.4]$, $\phi \in [0, \pi]$ et $z \in [-0.2, 0.2]$. Les conditions de bord sont périodiques en ϕ et libres selon r et z. Dans la suite, on prendra l'unité de temps égale à une orbite au rayon externe initial.

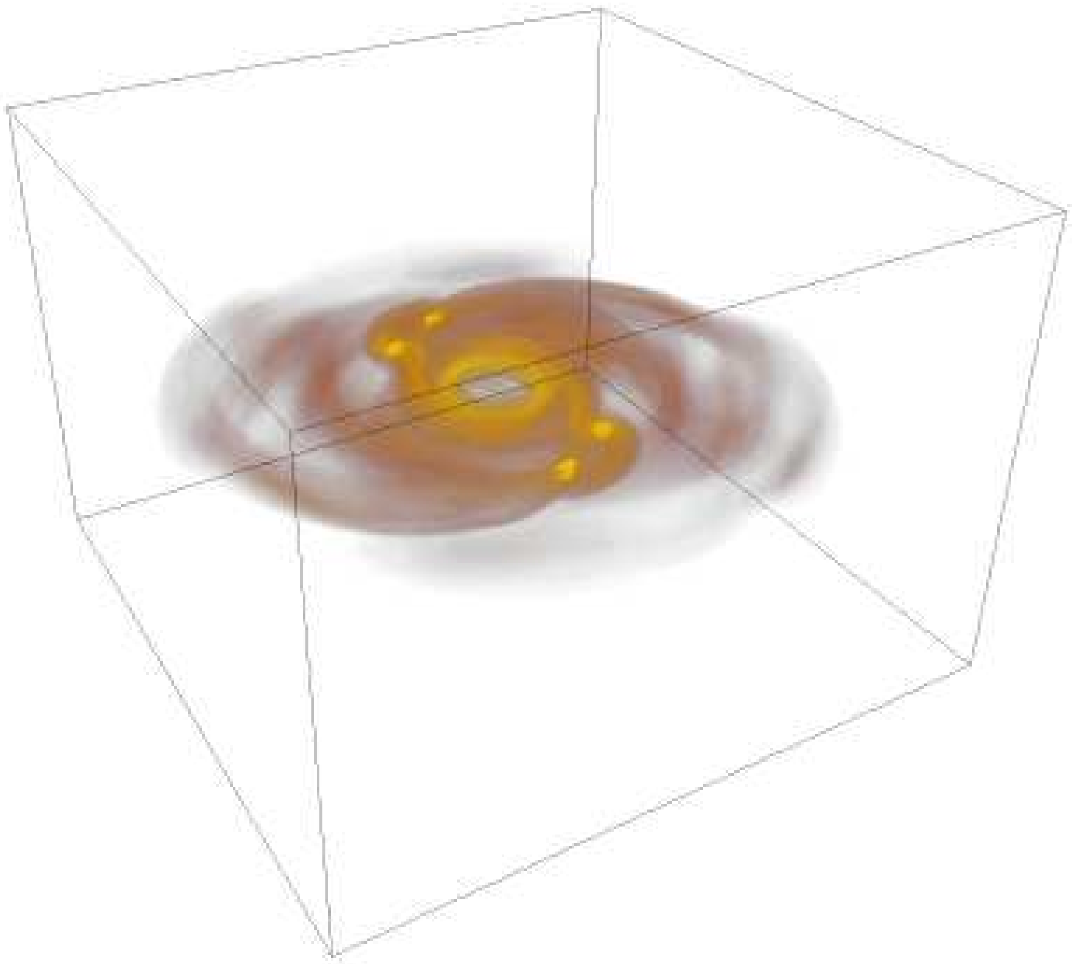

Fig. 4.17 – *État du disque obtenu avec le modèle HDISO2 après* 9.9 *orbites (le résultat de la simulation, réalisée entre* 0 *et* π *dans la direction orthoradiale, a été symétrisé pour la visualisation). La simulation est* **hydrodynamique**. *Des fragments denses se sont formés dans le disque.*

4.3.1 Simulations hydrodynamiques

Dans ce paragraphe, je présente les résultats des simulations hydrodynamiques pour lesquelles l'équation d'état est localement isotherme. La figure 4.16 montre l'évolution temporelle de la moyenne volumique du tenseur gravitationnel pour les modèles HDISO1 (*traits tirets*) et HDISO2 (*trait plein*). Les deux modèles diffèrent uniquement par leur résolution orthoradiale : 64 zones entre 0 et π pour le premier, 128 pour le deuxième. Comme dans les études précédentes (Pickett *et al.* , 1998, 2000a), l'instabilité gravitationnelle qui se développe dans le disque est plus violente dans cette simulation isotherme que lorsque l'une équation d'état est adiabatique. En effet, une comparaison entre la figure 4.16 et la figure 7 de l'article présenté dans les pages précédentes montre que la valeur maximale de $\langle T^{grav}_{r\phi}\rangle(t)$ est environ 2 fois plus importante dans le cas isotherme que lorsque l'équation d'état est adiabatique. La figure 4.16 montre également que la résolution a peu d'effet sur l'intensité de l'instabilité gravitationnelle, puisque la valeur maximale des courbes en trait plein et en traits tirets est presque la même. Seul change le moment auquel ce pic est atteint et le détail de la variation temporelle de $\langle T^{grav}_{r\phi}\rangle(t)$. En revanche, l'évolution qualitative du disque dans les deux simulations est très différente. En effet, des fragments denses apparaissent dans la simulation HDISO2 alors que ce n'est pas le cas dans la simulation HDISO1. Ce résultat est en particulier illustré par la figure 4.17, qui montre une vue 3D de l'état du modèle HDISO2 après 9.9 orbites : des fragments de matière sont apparents dans le plan équatorial du disque. Notons que des fragments apparaissent aussi dans le modèle HDISO3, pour lequel la valeur de m_{max} est égale à 8, ce qui montre que le nombre de coefficients de Fourier inclus dans le calcul du potentiel gravitationnel n'est pas très important pour diagnostiquer une éventuelle fragmentation du disque. En revanche, les différences qui apparaissent entre les modèles HDISO1 et HDISO2 montrent que la résolution est cruciale.

En fait, la situation présentée sur la figure 4.17 est loin d'être figée : les fragments apparaissent et disparaissent très rapidement dans le disque, ils se forment parfois par groupe et sont parfois accrétés par l'objet central. La figure 4.18 illustre cette situation dynamique en montrant des images du logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque à différents instants de la simulation HDISO2 : de gauche à droite et de haut en bas, $t = 9.0, 9.2, 9.3, 9.5, 9.9$ et 10.3. Ces images d'aspect changeant montrent que la densité dans le disque évolue très rapidement, et que les fragments ne survivent pas très longtemps. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par Pickett *et al.* (2003), mais différents de ceux de Boss (2002) ou de Mayer *et al.* (2002, 2004), qui rapportent des simulations dans lesquelles des fragments de matière survivent dans le disque pendant plusieurs orbites. Dans les simulations présentées ici, les fragments ne sont jamais découplés du reste de l'écoulement.

Pour tenter de mieux comprendre leur évolution, la figure 4.19 montre les contours d'iso–densité dans le plan équatorial du disque pour l'un d'entre eux (représenté en bas à droite de la figure 4.18). Trois images sont représentées, correspondant aux instants $t = 10.21$, 10.29 et 10.37. La densité maximale du fragment à chaque instant est respectivement $\rho_{max} = 93$, 70 puis 3.6 (à titre de comparaison, la densité maximale dans le disque au début de la simulation est égale à 1). À l'instant $t = 10.29$, la distribution

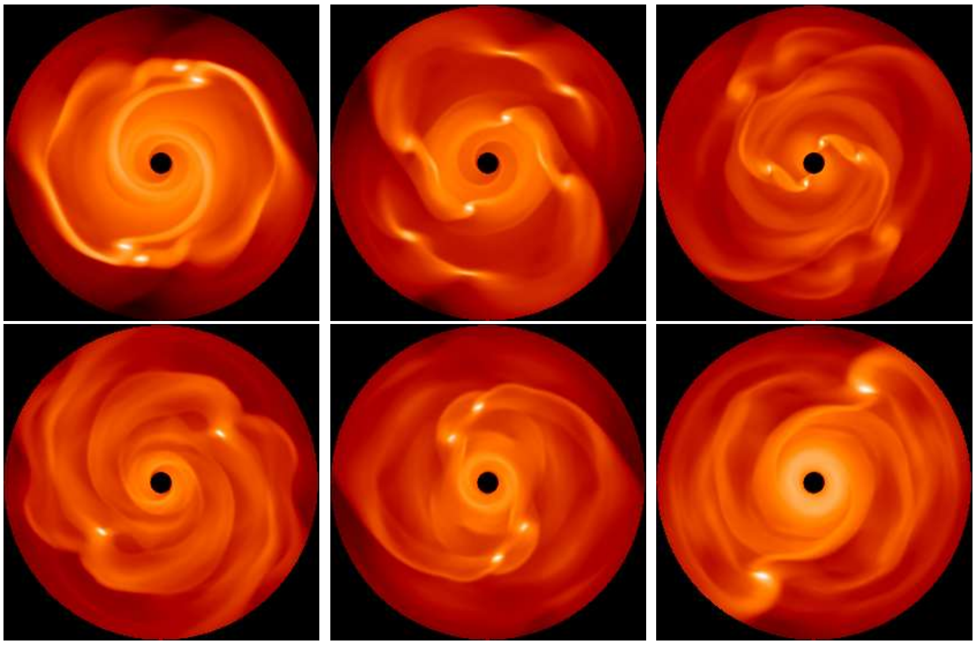

FIG. 4.18 – *Logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque pour le modèle HDISO2. De gauche à droite et de haut en bas, les différentes images correspondent à* $t = 9.0, 9.2, 9.3, 9.5, 9.9$ *et* 10.3. *La structure du disque est très changeante et les fragments de matière qui se forment ont une durée de vie en générale inférieure à une orbite.*

volumique de matière a été gardée en mémoire, ce qui permet de calculer la masse du fragment, défini comme étant le volume où la densité est supérieure à $\rho_{max}/10$ (voir aussi le tableau 4.2). Elle est égale à 2.4×10^{-3} fois la masse totale du système initial (disque + objet central). En supposant que cette dernière vaut 1 $M_{\odot}$, on en déduit que la masse du fragment est de l'ordre de la masse de Jupiter ($1 M_J = 3 \times 10^{-3} M_{\odot}$), c'est à dire comparable aux masses des fragments obtenus par Boss (2002) dans ses simulations. Les contours d'iso–densité représentés sur la figure 4.19 suggèrent que la structure de ces fragments est résolue. En effet, la taille d'une zone est $\Delta r = 10^{-2}$ et $\Delta\phi = 2.5 \times 10^{-2}$. Or, l'extension radiale du fragment est de l'ordre de 4×10^{-2}, soit environ 4 zones. La figure 4.18 montre également que le fragment a une forme légèrement allongée dans la direction orthoradiale, ce qui est probablement un reflet de la forme des cellules de la grille, puisque $r\Delta\phi \sim 2\Delta r$ en $r = 1$. Enfin, cette figure montre également que le fragment a une durée de vie courte, car sa densité maximale chute de manière dramatique entre le deuxième et le troisième schéma.

Le tableau 4.2 renseigne sur les propriétés des fragments présents dans le disque aux instants $t = 9.5$, 9.9 (deux fragments gravitent dans le disque à cet instant) et 10.3. Ils correspondent aux trois images sur la deuxième ligne de la figure 4.18. Pour chacun d'eux, le tableau donne le rayon orbital a, la densité maximale ρ_{max}, la masse pour deux contrastes de densité différents ($\rho \in [\rho_{max}/10, \rho_{max}]$ et $\rho \in [\rho_{max}/100, \rho_{max}]$), la masse de Jeans correspondante, le rayon du fragment r_{clump}, ainsi que le rayon de Hill

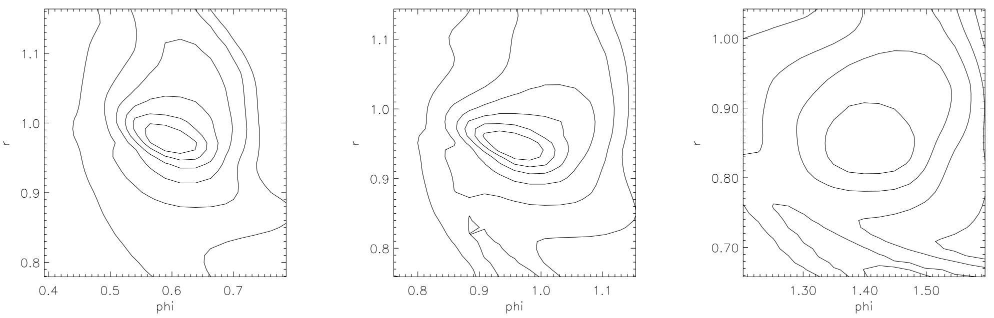

FIG. 4.19 – *Contour d'iso–densité au voisinage du fragment qui se forme à l'instant* $t = 10.3$ *(image en bas à droite de la figure 4.18). Les différents schémas correspondent, de gauche à droite, aux instants* $t = 10.21, 10.29$ *et* 10.37*. La densité maximale* ρ_{max} *du fragment est respectivement de* 93*,* 70 *puis* 3.6*. Les différents contours correspondent à* $\log\rho = \log\rho_{max} - 0.5, \log\rho_{max} - 1$*, etc...*

r_H et le rapport α entre l'énergie thermique et l'énergie gravitationnelle du fragment. Le rayon de Hill est défini par :

$$r_H = a\left(\frac{M_{10}}{3M_c}\right)^{1/3} \tag{4.6}$$

où M_c est la masse de l'objet central. Quant à α, étant donné la forme allongée des fragments et leur petite taille, il est calculé de manière approchée en supposant la densité du fragment constante et son profil sphérique. Avec cette approximation, qui permet d'obtenir des ordres de grandeur, les expressions de l'énergie thermique et de l'énergie gravitationnelle sont respectivement données par :

$$E_{th} = \frac{3}{2}M_{10}c^2 \tag{4.7}$$

$$|E_{grav}| = \frac{3}{5}\frac{GM_{10}^2}{r_{clump}} \tag{4.8}$$

où c est la vitesse du son. Le tableau 4.2 montre en particulier que la masse des fragments est de l'ordre de quelques M_J si on suppose que la masse totale initiale du système est de $1M_\odot$. De plus, elle est toujours très largement supérieure à la masse de Jeans, ce qui suggère que ces fragments devraient être en phase d'effondrement. La valeur de α est inférieure à 1, ce qui montre qu'ils sont gravitationnellement liés. Enfin, leur rayon est largement inférieur au rayon de Hill : les effets de marée dus à l'objet central ne sont donc pas susceptibles de les détruire. Tous ces indices montrent que les fragments devraient être capables de survivre. Or, comme on l'a vu précédemment, ce n'est pas le cas et leur durée de vie est toujours inférieure à une orbite. Il est possible qu'ils soient détruits par des effets de marée dus à la structure spirale du disque ou que la résolution ne soit pas suffisante pour empêcher leur disparition. En effet, leur

t(orbites)	9.5	9.9–1	9.9–2	10.3
a	0.69	0.52	0.65	0.97
ρ_{max}	106	357	256	134
M_{10}/M_T	3.7×10^{-3}	2.8×10^{-3}	4.4×10^{-3}	2.4×10^{-3}
M_{100}/M_T	8.6×10^{-3}	5.8×10^{-3}	7.0×10^{-3}	4.1×10^{-3}
M_J/M_T	6.5×10^{-4}	4.3×10^{-4}	4.4×10^{-4}	6.2×10^{-5}
r_{clump}	2×10^{-2}	–	2×10^{-2}	2×10^{-2}
r_H	8.3×10^{-2}	5.7×10^{-2}	8.3×10^{-2}	0.1
α	0.33	0.5	0.28	0.11

TAB. 4.2 – *Propriétés de certains fragments apparaissant sur la figure 4.18. La première ligne indique l'instant pour lequel leurs propriétés ont été mesurées . Pour chacun d'entre eux, les lignes suivantes donnent leur rayon, la densité maximale, leur masse (mesuré entre ρ_{max} et $\rho_{max}/10$ ou $\rho_{max}/100$ et normalisé par la masse totale initiale du système M_T.), la masse de Jeans correspondante M_J, leur taille, leur rayon de Hill et finalement le rapport α entre l'énergie thermique et l'énergie gravitationnelle.*

taille reste toujours de l'ordre de quelques cellules (r_{clump} ne dépasse pas la taille de 2 cellules et même d'une cellule dans le cas du fragment 9.9–1). Des simulations à plus haute résolution sont nécessaires pour répondre à cette question, mais ces résultats mettent en évidence la difficulté d'obtenir un diagnostic clair concernant la question de la formation des planètes par instabilité gravitationnelle dans un disque massif.

4.3.2 Simulations MHD

Les simulations précédentes ont montré qu'un disque auto–gravitant est susceptible de se fragmenter lorsque l'équation d'état est localement isotherme. Même si l'évolution à long terme de ces fragments n'est pas clairement établie, il est important de déterminer l'effet de la turbulence MHD sur leur formation.

Dans cette partie, je décris donc les résultats des modèles TISO1 et TISO2, qui sont les équivalents MHD des modèles HDISO1 et HDISO2. Comme ces derniers, ils ont été obtenus en redémarrant les modèles adiabatiques T2* et T3* à l'instant $t = 5.8$, mais en conservant le champ magnétique et en choisissant une valeur non nulle pour m_{max} ($m_{max} = 32$ pour TISO1 et $m_{max} = 64$ pour TISO2). Comme dans les simulations hydrodynamiques, l'instabilité gravitationnelle qui se développe est beaucoup plus violente que dans le cas adiabatique. Cela est illustré en particulier par la figure 4.20, qui compare le logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque pour les modèles T2* et TISO1. L'image de gauche montre l'état initial identique des deux modèles (c'est l'état du modèle T2* à $t = 5.8$) tandis que la partie droite de la figure représente dans chaque cas l'état du disque aux instants $t = 6.1$,6.4 et 6.7. Les bras spiraux sont nettement plus marqués dans le cas isotherme. Cette observation est également illustrée de manière plus quantitative par la figure 4.21, sur laquelle sont représentés le tenseur

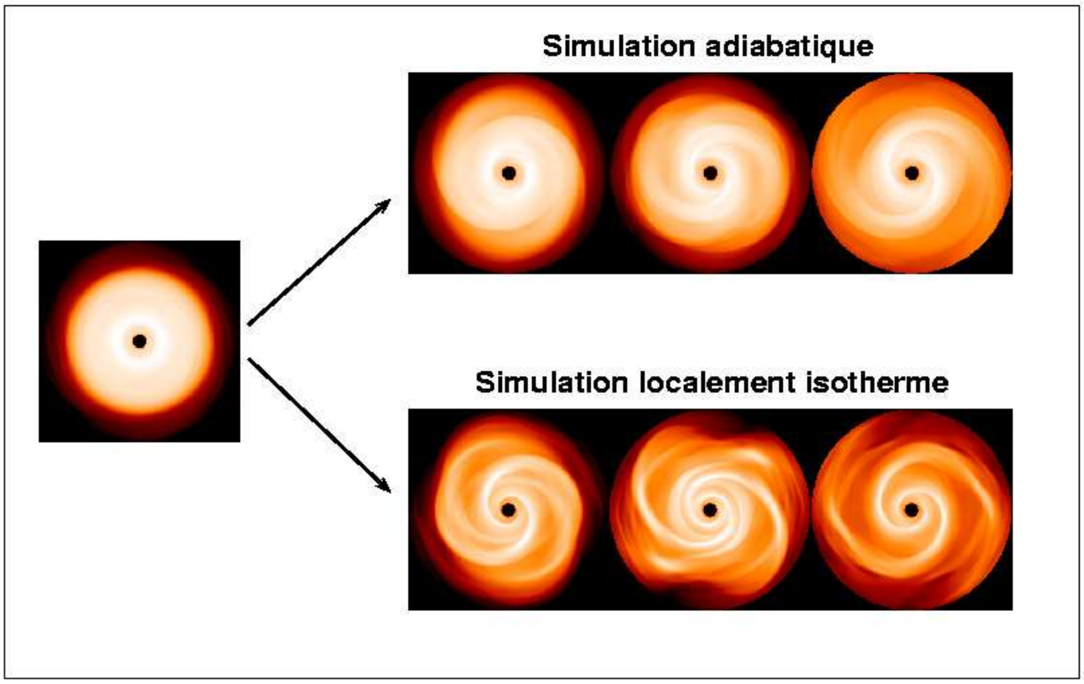

FIG. 4.20 – *Comparaison du logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque pour les modèles T2* et TISO1, de résolution et d'état initial identiques (illustré par l'image de gauche), aux instants* $t = 6.1$,6.4 *et* 6.7. *Comme dans le cas purement hydrodynamique, l'instabilité gravitationnelle est plus marquée lorsque l'équation d'état est localement isotherme.*

gravitationnel (*partie gauche*) et le tenseur de Maxwell (*partie droite*) pour les modèles T2* (*traits tirets*), TISO1 (*trait plein*) et TISO2 (*traits points–tirets*). On observe sur la figure de gauche que le tenseur gravitationnel atteint des valeurs maximales qui sont 2 fois plus importantes pour les modèles isothermes que pour le modèle adiabatique. Cependant, ces valeurs sont elles–mêmes environ la moitié de la valeur maximale de $\langle T_{r\phi}^{grav} \rangle$ obtenue dans les modèles hydrodynamiques isothermes HDISO1 et HDISO2 (voir la figure 4.16). Cela montre que l'effet direct de la turbulence MHD est encore une fois (comme dans le cas adiabatique) de réduire l'ampleur de l'instabilité gravitationnelle. Enfin, sur la partie droite de la figure 4.20, les modèles TISO1 et TISO2 montrent une décroissance du tenseur de Maxwell lors de l'apparition de l'instabilité gravitationnelle, de la même manière que dans le modèle T2* (voir la discussion de cet effet dans le paragraphe 4.2.2).

La principale différence entre ces modèles MHD et les modèles hydrodynamiques est que le disque ne se fragmente pas dans le modèle TISO2, qui est l'équivalent de la simulation HDISO2 dans laquelle de nombreux fragments apparaissent. La densité maximale atteinte dans le disque est $\rho_{max} = 20$, c'est à dire environ un ordre de grandeur plus faible que la densité maximale des fragments observés dans le modèle HDISO2 (voir le tableau 4.2). L'état du disque à cet instant $t = 6.66$ est représenté sur la figure 4.22. Il est très différent des états représentés dans le cas hydrodynamique

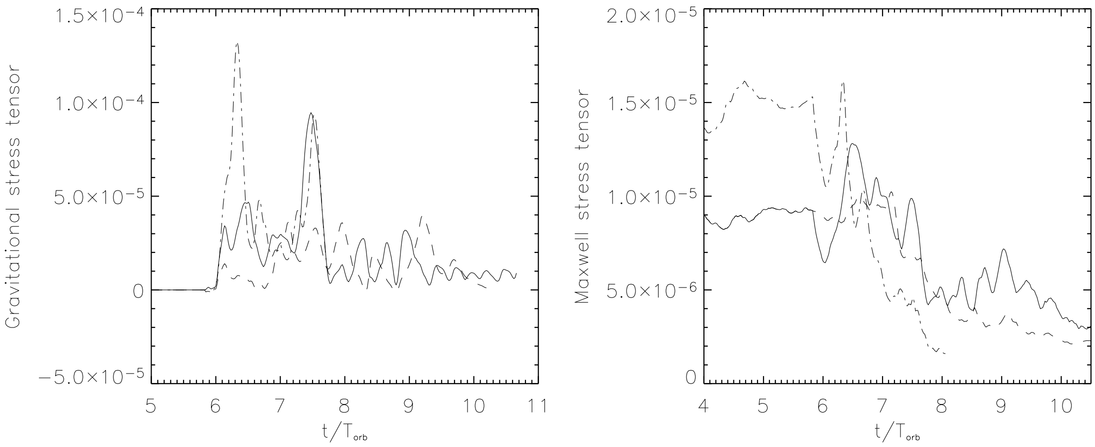

FIG. 4.21 – *La figure de gauche montre la variation temporelle de* $\langle T_{r\phi}^{grav} \rangle$ *pour les modèles T2* (traits tirets), TISO1 (trait plein) et TISO2 (traits points–tirets). Le transport gravitationnel est plus important lorsque l'équation d'état est isotherme. La figure de droite montre le tenseur de Maxwell pour les mêmes modèles.* $\langle T_{r\phi}^{Max} \rangle$ *diminue lorsque l'instabilité gravitationnelle se développe (voir aussi le paragraphe 4.2.2).*

sur la figure 4.18. La structure allongée et dense qui y apparaît et qui pourrait être un précurseur d'une possible fragmentation ne se condense jamais et disparaît très rapidement. Il semble que l'accumulation de champ magnétique dans le fragment en formation ne soit pas à l'origine de cette disparition, car la pression magnétique ne dépasse pas un tiers de la pression thermique à la position du maximum de densité. La raison de cette absence de fragmentation est peut–être simplement que la turbulence réduit la valeur maximale atteinte par le tenseur gravitationnel par rapport au cas purement hydrodynamique.

Il est probablement prématuré, étant donné ces résultats, de conclure que la turbulence MHD inhibe complètement la fragmentation du disque. En effet, de la même façon que celle–ci est absente à basse résolution dans le cas hydrodynamique mais présente à plus haute résolution, il est possible que des fragments apparaissent dans une simulation MHD de résolution supérieure. En revanche, cette partie montre clairement que la turbulence MHD rend cette fragmentation plus difficile, ce qui constitue un problème supplémentaire pour les modèles de formation planétaire par instabilité gravitationnelle.

4.4 Traitement du refroidissement du disque

Dans les deux parties précédentes, la thermodynamique dans le disque a été décrite de manière très simple. Les équations d'états n'y sont pas réalistes, mais elles représentent des états limites du comportement réel du disque. En effet, celui–ci est chauffé par les

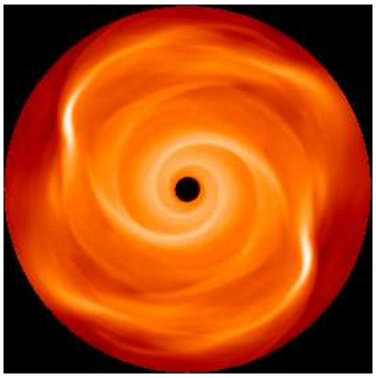

FIG. 4.22 – *Logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque à l'instant* $t = 6.66$ *obtenu avec le modèle TISO2. La valeur maximale de la densité est* $\rho_{max} = 20$. *La structure assez dense, très allongée, présente dans les parties externes du disque disparaît rapidement.*

chocs et la dissipation de la turbulence, mais pas de manière adiabatique comme cela était décrit dans la première partie de ce chapitre. De même, il se refroidit radiativement, mais pas assez efficacement pour que son évolution puisse être considérée comme isotherme. Pour essayer d'améliorer la description du disque, l'équation d'évolution de l'énergie interne est modifiée dans cette partie de façon à tenir compte de manière très simple de son refroidissement (en particulier, le traitement du transfert radiatif est ignoré). Elle s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\frac{e}{\rho}\right) = -P\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{e}{\tau_{cool}} \tag{4.9}$$

où τ_{cool} est un temps caractéristique de refroidissement. Comme dans les simulations hydrodynamiques récentes de Pickett *et al.* (2003), ce paramètre est constant, égal à deux fois la période orbitale au rayon externe initial du disque.

De la même manière que dans les paragraphes précédents, la structure du modèle initial a été calculée grâce à la méthode SCF. Cependant, j'ai utilisé la modification suggérée par Pickett *et al.* (2003) qui permet d'imposer la dépendance radiale de la densité surfacique de masse $\Sigma(r)$. Pour obtenir un modèle aussi proche que possible que celui utilisé par ces auteurs, j'ai calculé comme eux la structure d'un disque pour lequel $\Sigma(r) \propto r^{-0.5}$. Ses contours d'iso–densité sont présentés sur la figure 4.23, avec les mêmes conventions que dans le cas de la figure 4.1. Outre la forme particulière de $\Sigma(r)$, les autres paramètres du modèle sont $R_{min} = 0.2$, $R_{max} = 1$, $M_c/M_d = 5$ et $P \propto \rho^{5/3}$. Le profil radial du paramètre de Toomre pour ce modèle est représenté sur la partie droite de la figure 4.23. Il est assez largement supérieur à 1 dans les parties internes du disque et décroît avec le rayon jusqu'à devenir de l'ordre de 1 dans les parties externes.

À $t = 0$, un champ magnétique poloïdal à symétrie cylindrique est ajouté à ce modèle de disque. Il est défini à partir de la composante orthoradiale d'un potentiel vecteur A_ϕ par la relation

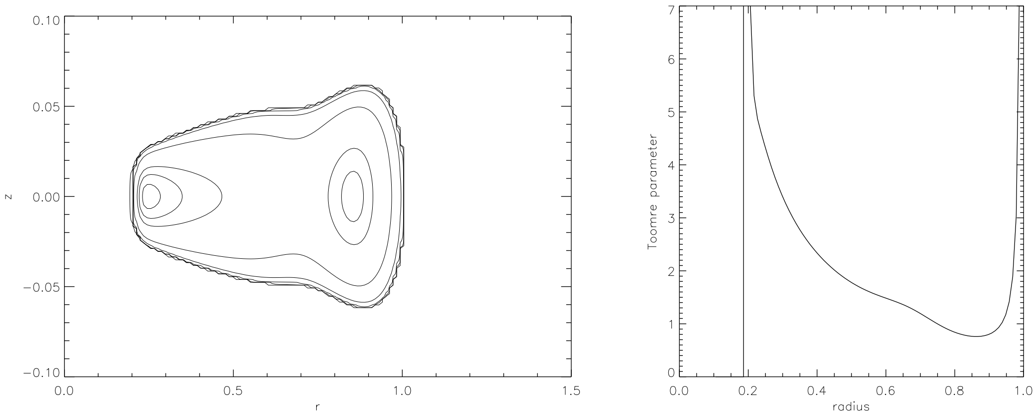

FIG. 4.23 – *Contour d'iso–densité du modèle initial utilisé dans les simulations HDCOOL et PCOOL (partie gauche) et profil radial du paramètre de Toomre Q (partie droite).*

Modèle	M_c/M_d	$\Sigma(r)$	m_{max}	$\langle\beta\rangle$	Résolution
HDCOOL	5	$\Sigma \propto r^{-0.5}$	16	∞	$(128, 128, 128)$
PCOOL	–	–	–	400	–

TAB. 4.3 – *Caractéristiques des simulations traitant explicitement du refroidissement du disque. La colonne 2 donne le rapport entre la masse centrale et la masse du disque, la colonne 3 précise la dépendance radiale de la densité surfacique de masse. Les colonnes 4 et 5 donnent respectivement les valeurs des paramètres m_{max} et $\langle\beta\rangle$ et la résolution de chaque simulation est indiquée dans la dernière colonne.*

$$A_\phi \propto \rho \cos\left(8\pi \frac{r - R_{min}}{R_{max} - R_{min}}\right) . \tag{4.10}$$

Le champ magnétique obtenu grâce à ce potentiel est multiplié par une constante pour que la moyenne volumique du paramètre $\langle\beta\rangle$ soit égale à 400. La définition (4.10) correspond à 4 boucles de champ incluses dans le disque. Une perturbation aléatoire de densité d'amplitude relative égale à 5×10^{-3} est également superposée au champ de densité. Une simulation adiabatique, **sans refroidissement**, de résolution $(N_r, N_\phi, N_z) = (128, 128, 128)$ et pour laquelle $m_{max} = 0$ est réalisée entre les instants $t = 0$ et $t = 4.5$, jusqu'à obtenir des propriétés stationnaires de la turbulence. Comme dans les parties précédentes, le domaine azimutal est restreint à l'intervalle $[0, \pi]$.

À $t = 4.5$, l'état obtenu est utilisé pour démarrer les simulations HDCOOL et TCOOL, dont les propriétés sont décrites dans le tableau 4.3. Le modèle HDCOOL est hydrodynamique et son état à $t = 4.5$ est calculé de la même manière que pour le modèle HDISO2 : les trois composantes du champ magnétique sont mises à zéro, les fluctuations des variables hydrodynamiques sont supprimées et une perturbation

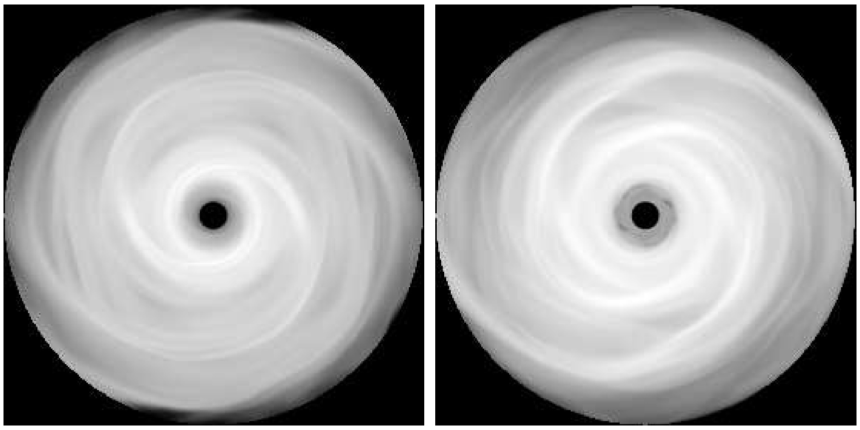

FIG. 4.24 – *Logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque pour le modèle HDCOOL à $t = 9.7$ (figure de gauche) et pour le modèle PCOOL à $t = 7.3$ (figure de droite).*

aléatoire est ajoutée au champ de densité. Dans les deux modèles, le transport gravitationnel est permis : $m_{max} = 16$ et le disque se refroidit avec le temps caractéristique τ_{cool}.

À cause de ce refroidissement, le paramètre de Toomre diminue dans le disque pour $t \geq 4.5$ et des instabilités gravitationnelles apparaissent à partir des instants $t = 6.5$ et $t = 5.1$, respectivement pour les modèles HDCOOL et TCOOL. La figure 4.24 illustre cette évolution en représentant le logarithme de la densité dans le plan équatorial du disque pour le cas hydrodynamique (*image de gauche*) et MHD (*image de droite*) respectivement à $t = 9.7$ et 7.3. Dans les deux cas, des structures spirales sont visibles, mais sur des échelles bien plus petites que pour les modèles purement adiabatiques ou purement isothermes des paragraphes précédents.

Les propriétés quantitatives du transport de moment cinétique sont analysées sur la figure 4.25. La partie gauche de la figure représente l'évolution temporelle du tenseur gravitationnel pour le modèle HDCOOL. Sur la partie droite, qui concerne le modèle TCOOL, le tenseur de Maxwell et le tenseur gravitationnel sont représentés respectivement en trait plein et en traits tirets. Une comparaison des deux figures montre que l'instabilité gravitationnelle est plus marquée au début de la simulation pour le modèle hydrodynamique que pour le modèle MHD. Comme dans les cas adiabatiques et isothermes, la valeur maximale de $\langle T_{r\phi}^{grav} \rangle$ est supérieure dans le cas hydrodynamique. Elle vaut 1.9×10^{-5} pour le modèle HDCOOL et seulement 9×10^{-6} pour le modèle TCOOL. Pour ce dernier, le tenseur de Maxwell diminue d'un facteur 3 environ lors de l'apparition de l'instabilité gravitationnelle, comme dans le cas du modèle adiabatique T2*. À partir de $t = 7$, le modèle TCOOL semble être dans un état quasi–stationnaire, caractérisé par une valeur constante du tenseur de Maxwell. Le tenseur gravitationnel présente de larges oscillations autour d'une valeur moyenne égale à 4×10^{-6} environ, mais ne semble pas diminuer au cours de la simulation.

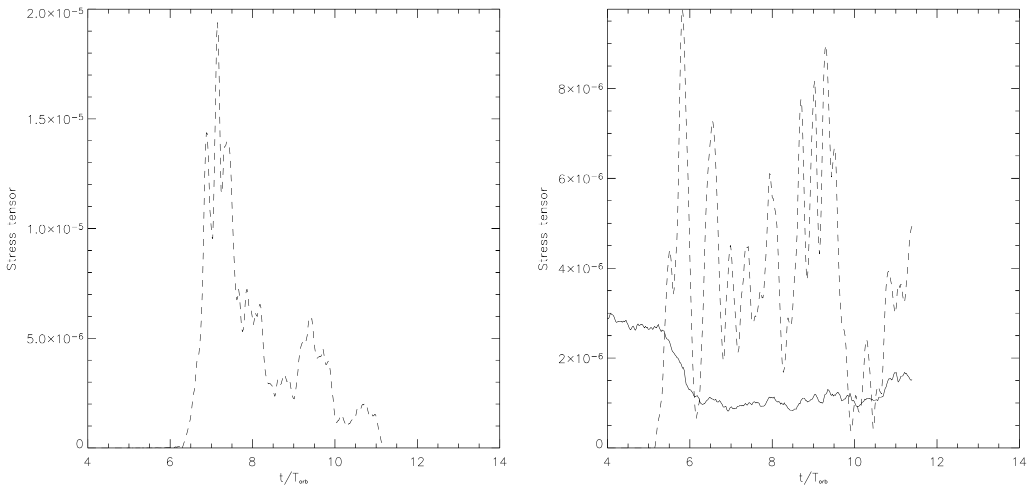

FIG. 4.25 – *La partie gauche de la figure représente l'évolution temporelle du tenseur gravitationnelle pour le modèle HDCOOL, tandis que la partie droite illustre les variations du tenseur de Maxwell (trait plein) et du tenseur gravitationnel (traits tirets) pour le modèle PCOOL.*

Le scénario d'auto–régulation de l'instabilité gravitationnelle introduit par Paczynsky (1978) suggère que le paramètre de Toomre se stabilise à une valeur proche de 1 dans le cas de ces simulations, lorsque le chauffage du aux chocs et le refroidissement radiatif se compensent (voir chapitre 1). La partie gauche de la figure 4.26 compare la valeur du paramètre de Toomre à l'instant $t = 11.2$ pour les modèles HDCOOL (*trait plein*) et TCOOL (*traits tirets*). Dans les deux cas, Q s'est stabilisé à une valeur comprise entre 1.1 et 1.5 pour des rayons supérieurs à 0.4. Cette valeur est similaire à celle obtenue dans les simulations hydrodynamiques récentes de Pickett *et al.* (2003) et Rice *et al.* (2003) réalisées dans des conditions similaires.

Une différence intéressante entre les modèles HDCOOL et PCOOL est illustrée par la partie droite de la figure 4.26, qui montre le taux d'accrétion sur l'objet central en fonction du temps. Entre $t = 0$ et $t = 4$, les courbes en trait plein (pour le modèle HDCOOL) et en traits tirets (pour le modèle PCOOL) sont confondues. Les modèles sont identiques pendant cette phase : le disque est turbulent, $m_{max} = 0$ et l'équation d'état est adiabatique. Pour $t \geq 4$, l'accrétion sur l'objet central continue dans le modèle TCOOL, et atteint une valeur constante lorsque $t \geq 8$. En revanche, le taux d'accrétion reste minuscule dans le cas du modèle HDCOOL. En effet, comme $Q \gg 1$ lorsque $r \leq 0.25$ (voir la partie gauche de la figure 4.26), le disque est stable gravitationnellement dans ses parties internes et aucun mécanisme n'est capable de transporter la matière vers l'objet central dans le modèle HDCOOL. En revanche, dans le modèle TCOOL, le tenseur de Maxwell est positif aux rayons $r \leq 0.25$ et maintient un taux d'accrétion non nul sur l'objet central.

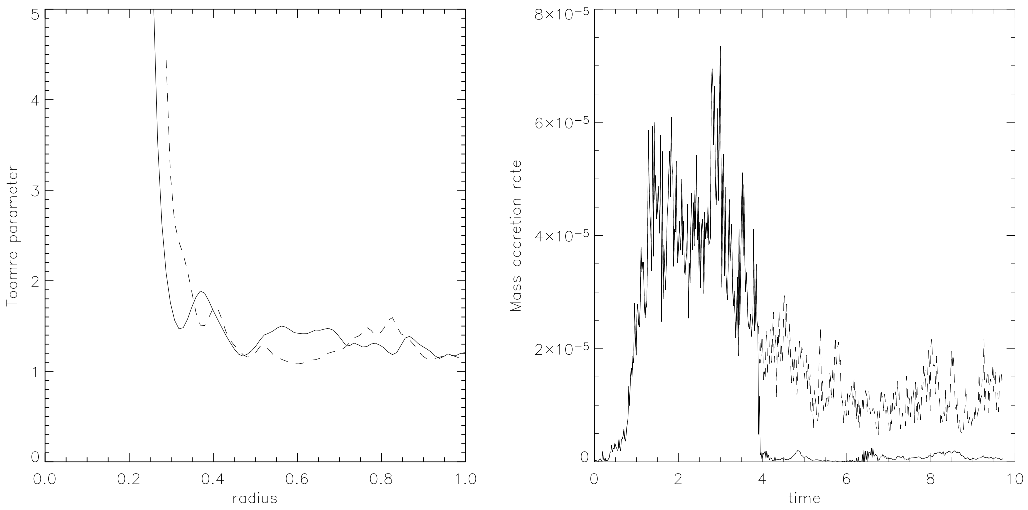

FIG. 4.26 – *La figure de gauche montre le profil radial du paramètre de Toomre Q à l'instant $t = 11.2$ pour les modèles HDCOOL (courbe en trait plein) et PCOOL (courbe en traits tirets). Dans chaque cas, le modèle a évolué vers un état quasi–stationnaire dans lequel $Q \in [1, 1.5]$. La figure de droite représente le taux d'accrétion sur l'objet central en fonction du temps pour les mêmes modèles.*

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai réalisé des simulations 3D de disques massifs et magnétisés. Dans ces disques, des instabilités gravitationnelles asymétriques se développent en même temps que l'instabilité MRI. Trois régimes thermodynamiques ont été étudiés.

Des simulations adiabatiques ont permis en particulier d'étudier l'influence de la turbulence sur les modes gravitationnels présents dans le disque. Si la turbulence MHD diminue l'intensité des modes déjà présents dans les simulations hydrodynamiques, les fluctuations à haute fréquence qui lui sont associées excitent également un mode supplémentaire de fréquence supérieure à celle du mode propre hydrodynamique. Les deux modes interfèrent, parfois destructivement, ce qui entraîne une diminution du taux de transport de moment cinétique dans le disque. Le taux d'accrétion sur l'objet central devient lui–même variable avec le temps.

Lorsque l'équation d'état est isotherme, des simulations hydrodynamiques ont permis d'étudier le problème de la fragmentation du disque par instabilité gravitationnelle. Lorsque la résolution de la simulation est suffisante, le disque fragmente et des "planètes" dont la masse est de l'ordre de celle de Jupiter apparaissent dans le disque. Cependant, elles disparaissent assez rapidement et ne se découplent jamais du reste de l'écoulement. La présence d'un champ magnétique affecte significativement l'évolution qualitative du disque, puisque les fragments n'apparaissent jamais en régime de turbulence MHD. Apparemment, la pression magnétique n'est pas à l'origine de ce phénomène, car elle ne dépasse jamais le tiers de la pression thermique à la position du maximum de densité. C'est probablement la valeur plus faible du tenseur gravitationnel dans ce cas qui empêche la formation de ces structures.

Enfin, un traitement préliminaire du refroidissement du disque a été inclus dans certaines simulations. Conformément au scénario de Paczynsky (1978), le disque évolue vers un état quasi–stationnaire dans lequel $Q \sim 1$.

Chapitre 5

Migration des planètes dans les disques magnétisés

Sommaire

5.1 Introduction

5.1.1 Les planètes extra–solaires

Un des faits les plus marquants de la fin du XXème siècle en astrophysique a sans aucun doute été l'annonce faite en 1995 par Michel Mayor et Didier Queloz de la découverte d'un objet de masse planétaire autour de l'étoile de type solaire 51 *Peg*. Cette découverte a d'ailleurs fait l'objet d'une publication dans la revue *Nature* (Mayor & Queloz, 1995). L'observation, qui fut vite confirmée, est basée sur la méthode dite des vitesses radiales. L'idée est que l'étoile tourne autour du centre de masse étoile–planète. Ceci entraîne une variation périodique de la vitesse radiale de l'étoile que l'on peut peut mesurer par décalage Doppler. Cette variation est faible car la masse de la planète est petite par rapport à celle de l'étoile, mais néanmoins détectable avec les moyens spectroscopiques modernes. À titre d'exemple, la figure 5.1 montre la mesure de la vitesse radiale de 51 *Peg*. La courbe présente une variation sinusoïdale due à la

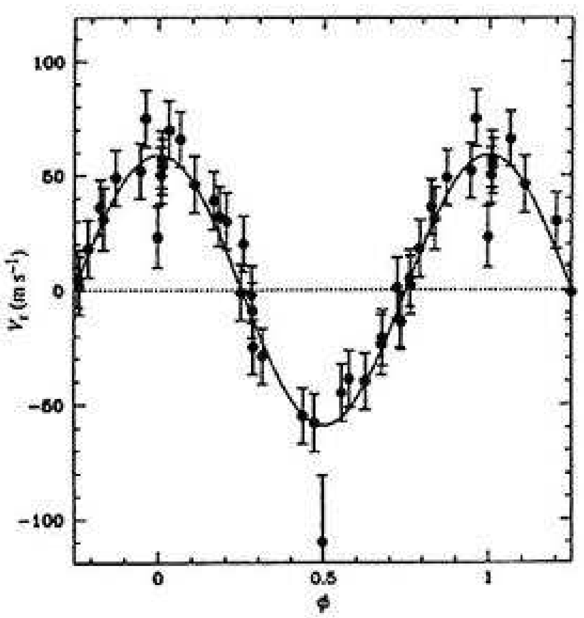

FIG. 5.1 – *Variation de la vitesse radiale de l'étoile* 51 *Peg en fonction du temps. L'ajustement en trait plein montre une modulation sinusoïdale due à la présence d'une planète de masse projetée* $M \sin i = 0.45$ *fois la masse de Jupiter en orbite autour de l'étoile. Tiré de Mayor & Queloz (1995).*

présence d'une planète dont la période de rotation autour de l'étoile est de 4.23 jours. Comme le système apparaît projeté sur le ciel, seul le produit $M \sin i$, où M est la masse de la planète et i est l'angle entre le plan du ciel et le plan de l'orbite, peut–être mesuré. Dans le cas de 51 *Peg*, il vaut 0.45 fois la masse de Jupiter ($1 M_J = 10^{-3} M_\odot$).

Évidemment, cette découverte a eu un impact très important auprès du grand public, d'autant plus qu'elle a été suivie de très nombreuses autres observations du même type. En effet, grâce à la méthode des vitesses radiales, on a détecté à ce jour 120 planètes appartenant à 105 systèmes planétaires différents. 13 systèmes comportant plusieurs planètes ont été découverts, dont deux possédant trois planètes. De plus, l'existence de l'une de ces planètes, autour de l'étoile HD 209458, a été confirmée par une technique différente qui consiste à mesurer la (faible) baisse de luminosité de l'étoile lorsqu'elle est partiellement occultée par le passage de la planète sur la ligne de visée (Charbonneau *et al.* , 2000). Cette méthode, dite des "transits", ne peut bien sûr être utilisée que lorsque le système étoile–planète est vu de profil.

L'une des premières interrogations à l'annonce de la découverte de 51 *Peg* est venue de sa très faible période orbitale, qui place la planète à 0.05 UA de son étoile hôte, c'est à dire seulement un dixième de la distance de Mercure au Soleil. Cependant, il était impossible à l'époque de savoir si 51 *Peg* était un cas unique ou le représentant d'un type nouveau mais commun de systèmes planétaires. Aujourd'hui, le nombre bien plus important de planètes extra–solaires connues permet de commencer à faire des

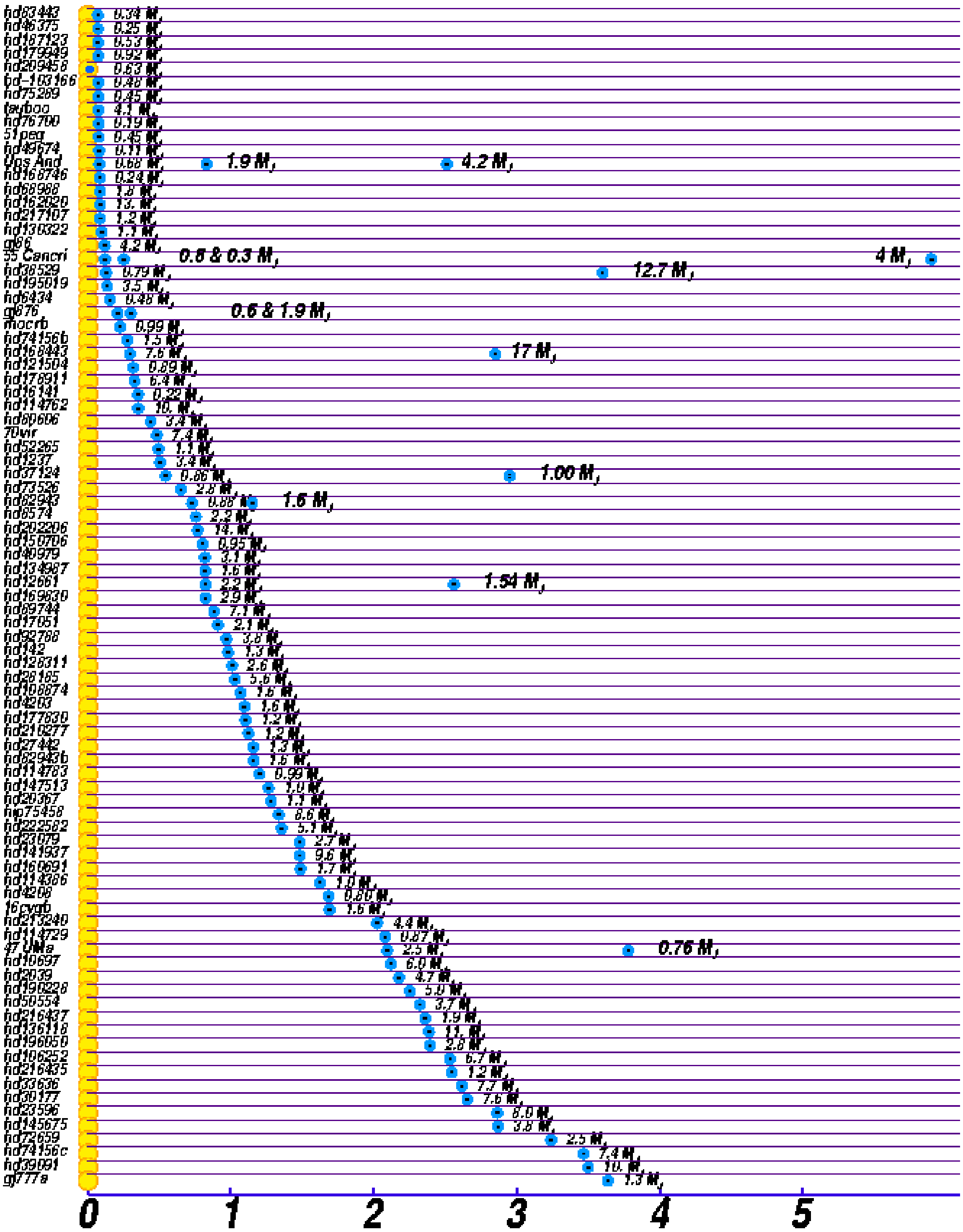

FIG. 5.2 – *Distances (en UA) entre les planètes extra–solaires connues et leur étoile hôte. Chaque ligne du tableau correspond à un système planétaire. La masse projetée de chaque planète est indiquée à sa droite en masse de Jupiter. Disponible à l'URL http ://exoplanets.org/massradiiframe.html.*

statistiques significatives. Ainsi, la figure 5.2 représente les distances entre les planètes connues à l'heure actuelle et leur étoile (elle est disponible à l'URL *http ://exoplanets.org/massradiiframe.html* sur la page du *California & Carnegie Planet Search*). Il apparaît sur cette figure que près de 20% des planètes connues sont situées à des distances de leur étoile hôte comprises entre 0.038 et 0.1 UA. Cela soulève bien évidemment des questions sur les conditions physiques probablement extrêmes à leur surface, mais aussi sur les mécanismes de formation de ces planètes désormais connues sous le nom de "Jupiter–chaudes". En effet, il est peu probable qu'elles aient pu se former *in–situ* à cause de l'absence de poussières et du faible réservoir de gaz à ces petits rayons dans le disque d'accrétion (Bodenheimer *et al.* , 2000). Elles ont donc probablement été formées à des distances plus grandes et se sont ensuite déplacées dans le disque jusqu'au rayon où elles sont observées aujourd'hui.

5.1.2 Interaction disque/planète

Il se trouve que les premières idées concernant la migration planétaire dans les disques d'accrétion sont antérieures à 1995 et à la découverte de la planète autour de 51 *Peg*. En effet, Goldreich & Tremaine ont montré dès 1979 que la perturbation gravitationnelle due à la planète excitait des ondes de densité dans le disque au niveau des résonances de Lindblad. Celles–ci se propagent de part et d'autre du rayon orbital R_{pl} de la planète. À cause de la rotation différentielle, la partie externe du disque pour laquelle $r \geq R_{pl}$ exerce un couple négatif sur la planète tandis que la partie interne exerce un couple positif. Ward (1986, 1997) a montré que le couple négatif l'emportait pour des raisons géométriques, ce qui conduit à la migration de la planète vers les parties internes du disque. Pour les planètes de faible masse (une à quelques dizaines de fois la masse de La Terre), la planète se déplace sous l'action de ce couple de marée tandis que le disque lui–même est peu perturbé. Le temps caractéristique de cette migration, dite de type I, est de l'ordre de 10^4 à 10^6 ans. Lorsque la planète est plus massive, le couple qu'elle exerce sur le disque est suffisant pour provoquer dans le voisinage de son orbite l'ouverture d'un sillon dans lequel la densité est plus faible que dans le reste du disque. Les couples de marée exercés par les deux ondes spirales immobilisent la planète dans le sillon. Dès lors, elle suit le disque dans son mouvement d'accrétion vers l'étoile centrale : on parle de migration de type II. La formation de ce sillon est illustrée par la figure 5.3, extraite de l'article de Nelson *et al.* (2000). Une planète de masse 1 M_J, représentée par le cercle blanc sur les différentes figures, crée des ondes de densité qui se propagent dans le disque, puis ouvre progressivement un sillon de part et d'autre de son orbite. Pour les planètes dont la masse est de l'ordre de celle de Jupiter, le temps caractéristique de migration obtenu grâce à ces simulations est donné par le temps visqueux associé au disque, i.e. de l'ordre de 10^3 à 10^5 ans pour une planète située à 5 AU.

Mais comment arrêter la migration des planètes ? En effet, les temps caractéristiques mentionnés ci–dessus sont bien plus faibles que le temps de vie d'un disque, qui est de l'ordre de 10 millions d'années. Si aucun mécanisme n'existe pour stopper les planètes, elles risquent de finir leur course avalées par l'étoile centrale. La migration de type

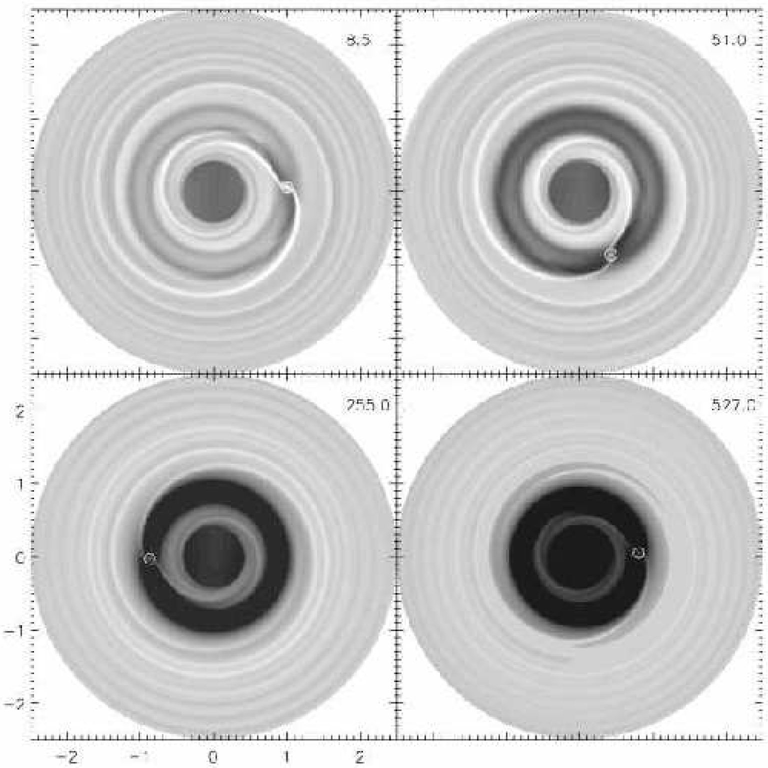

FIG. 5.3 – *Evolution de la densité surfacique de masse d'un disque d'accrétion contenant une planète de* $1 M_J$. *Celle–ci excite des ondes de densité qui se propagent dans le disque de part et d'autre de son orbite. L'interaction disque–planète provoque l'apparition progressive d'un sillon autour de l'orbite de la planète dans lequel la densité diminue. Le temps est indiqué en haut à droite de chaque image ; il est mesuré en nombre d'orbites effectuées par la planète. Tiré de Nelson* et al. *(2000).*

II n'est peut–être pas une fatalité car elle suppose que la masse du disque dans le voisinage de la planète soit de l'ordre de celle de la planète. En effet, si la masse restant dans le disque après la formation de la planète est trop faible, l'inertie de la planète la rend peu sensible à l'interaction avec le disque et la migration est peu efficace. En revanche, la migration de type I semble inévitable, ce qui pose un problème pour justifier l'existence de planètes de faible masse (comme la nôtre !). Mais ce problème ne touche pas uniquement les planètes de type terrestre. En effet, dans le scénario de formation des planètes géantes dit "d'accrétion du coeur" (Pollack *et al.* , 1996), il y a d'abord une phase pendant laquelle un coeur solide de masse égale à une dizaine de fois la masse de La Terre s'assemble. Cette "proto–planète" accrète ensuite une enveloppe de gaz pour devenir une planète géante. Selon la théorie actuelle, le temps de formation de ce coeur est plus long que le temps caractéristique de sa migration dans le disque, rendant problématique l'existence des planètes géantes elles–mêmes. Divers mécanismes ont été invoqués pour arrêter la migration de type I. Par exemple, elle peut être stoppée lorsque la planète atteint une cavité magnétosphérique formée par l'étoile

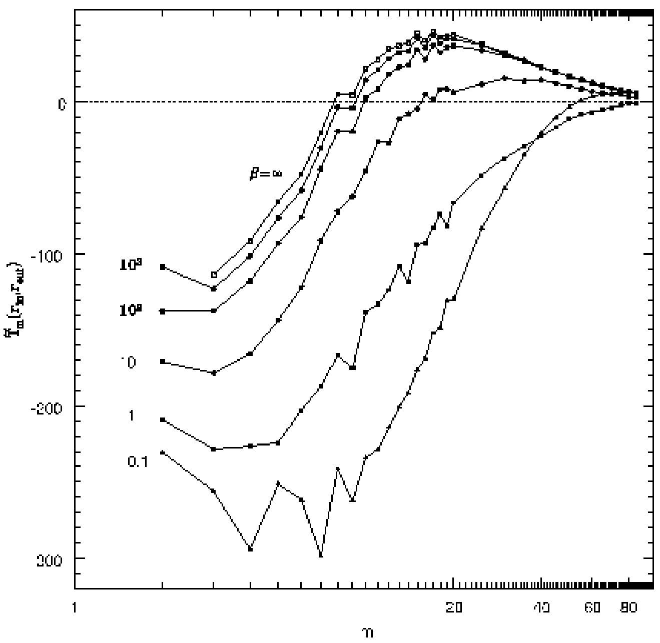

FIG. 5.4 – *Coefficients de Fourier d'ordre m du couple exercé par une planète sur un disque de densité surfacique de masse uniforme et pour lequel $H/r = 0.03$ en fonction du nombre azimutal m et du rapport β entre la pression thermique et la pression magnétique ($\beta = +\infty$ correspond à $B = 0$). La figure illustre un cas pour lequel $B \propto r^{-3/2}$. Le couple total exercé par la planète est la somme sur toutes les valeurs de m. La planète migre vers l'intérieur s'il est positif (comme c'est le cas pour $B = 0$ par exemple), vers l'extérieur dans le cas contraire. Extrait de (Terquem, 2003)*

et dans laquelle le disque ne pénètre pas. Elle peut également changer de direction si le gradient de température s'inverse, comme cela peut être le cas dans les parties internes du disque (Ward, 1986, 1997) ou si l'excentricité de la planète est supérieure au rapport H/r (Papaloizou & Larwood, 2000; Papaloizou, 2002). Dans ce dernier cas cependant, il semble difficile de maintenir non nulle une telle excentricité (Goldreich & Tremaine, 1980).

Récemment, Terquem (2003) a proposé que la présence d'un champ magnétique orthoradial dans le disque puisse avoir un effet sur la migration. L'idée est que ce champ magnétique change les propriétés de propagation des ondes, ce qui modifie le couple total exercé sur la planète. Plus précisément, en considérant l'effet d'un champ magnétique orthoradial sur un disque infiniment fin, Terquem (2003) a montré que deux résonances magnétiques apparaissaient de part et d'autre de la planète à des rayons r_M définis par :

$$|r_M - R_{pl}| = \frac{2H}{3\sqrt{1+\beta}} \tag{5.1}$$

où β est le rapport entre la pression thermique et la pression magnétique, R_{pl} le rayon orbital de la planète et H la demi–hauteur du disque. Ces résonances sont associées à la propagation des ondes MHD lentes. La réponse du disque et le couple qui s'exerce sur la planète sont singuliers en $r = r_M$. La résonance magnétique interne crée un couple positif sur la planète, la résonance externe un couple négatif. Dans les deux cas, il est d'autant plus grand en valeur absolue que l'intensité du champ magnétique est importante. Ainsi, si celle–ci diminue rapidement avec le rayon, la résonance interne peut dominer et le couple total exercé sur la planète peut devenir positif, contrairement au cas hydrodynamique. Ce résultat est illustré par exemple par la figure 5.4 extraite de cette analyse linéaire. Elle montre les coefficients de Fourier $\tilde{T}_m$ du couple (sans dimension) exercé par la planète sur le disque en fonction du nombre azimutal m pour différentes valeur de β en $r = R_{pl}$, dans un cas où $B \propto r^{-3/2}$. Le couple total (i.e. la somme sur l'ensemble des valeurs de m) est positif lorsque $B = 0$ (c'est à dire lorsque $\beta = +\infty$), mais diminue lorsque le champ augmente (c'est à dire β diminue), pour finalement devenir négatif lorsque $\beta \sim 10$. Dans ce cas, la planète migre vers les parties externes du disque.

Les simulations présentées dans ce chapitre se proposent d'illustrer les résultats analytiques, de mieux comprendre la nature de ces résonances magnétiques et de quantifier les conditions dans lesquelles le sens de migration change.

5.2 Stratégie

5.2.1 Le problème numérique

Dans cette étude sur la migration des planètes de masse terrestre dans un disque magnétisé, j'ai réalisé des simulations bidimensionnelles dans le plan (r, ϕ) en utilisant une version 2D du code *GLOBAL*. Les caractéristiques du disque sont similaires à celles utilisées par Nelson *et al.* (2000) : la densité surfacique de masse est uniforme, $\Sigma_d = 6 \times 10^{-4}$, et le domaine de calcul s'étend de $R_{min} = 0.4$ à $R_{max} = 2.5$. L'équation d'état du gaz est localement isotherme, avec une dépendance radiale telle que :

$$P = \rho \cdot c(r)^2 = \rho \left(\frac{H}{r}\right)^2 \frac{GM_*}{r}\,, \tag{5.2}$$

où H est la demi–hauteur du disque et M_* la masse de l'objet central.

Une planète de masse M_{pl} est ajoutée dans le disque au rayon $R_{pl} = 1$. Dans les simulations présentées dans ce chapitre, cette planète ne peut pas migrer dans le disque, c'est à dire que le rayon de son orbite est maintenu fixe. En pratique, un potentiel gravitationnel est simplement ajouté dans le code. Comme l'origine du repère n'est pas confondue avec le centre de masse du système, des forces inertielles supplémentaires apparaissent, de sorte que le potentiel total $\Phi(r, \phi)$ en un point du disque s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi(r,\phi) = & - \frac{GM_*}{r} - \frac{GM_{pl}}{(r^2+R_{pl}^2-2rR_{pl}\cos(\phi-\phi_{pl})+\epsilon^2)^{1/2}} \\ & + \frac{GM_{pl}}{R_{pl}^3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{R_{pl}} + G\int_S \frac{dm(\boldsymbol{r'})}{r'^3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r'}\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans cette équation, le second terme est le potentiel gravitationnel créé par la planète. Le paramètre ϵ, dit de régularisation, l'empêche d'être singulier au voisinage de la planète. Nelson & Papaloizou (2004) ont montré que la valeur de ϵ avait une influence sur la vitesse de migration des planètes de faible masse dans les simulations hydrodynamiques 2D. En comparant leurs résultats numériques aux calculs linéaires 3D de Tanaka *et al.* (2002), ils ont conclu qu'une valeur de ϵ égale à $0.7H$ permettait de retrouver la vitesse de migration des planètes de faible masse obtenue par des calculs analytiques. Dans notre cas, la distance maximale entre l'orbite de la planète et les résonances magnétique vaut $2H/3$. Dans le but d'isoler les résonances magnétiques, nous avons donc choisi d'utiliser $\epsilon = 0.1H$ dans les simulations MHD. Cela conduit probablement à des vitesses de migration incorrectes, mais permet d'être certain de traiter correctement la zone proche des résonances.

Dans les simulations MHD, un champ magnétique orthoradial est ajouté dans le disque à l'instant $t = 0$. Son intensité est caractérisée par la valeur du paramètre β au rayon de la planète, et son profil radial au début de la simulation est en loi de puissance :

$$B = \sqrt{\frac{8\pi P(r=R_{pl})}{\beta(r=R_{pl})}}\ \left(\frac{R_{pl}}{r}\right)^{-p}\,. \tag{5.4}$$

En pratique, B est non nul seulement dans un domaine $[R_{b1}, R_{b2}]$ inclus dans le domaine de calcul afin d'éviter d'avoir à s'inquiéter des conditions de bord pour le champ magnétique. Notons que malgré la présence de ce champ magnétique, le disque ne devient pas turbulent dans ce cas car sa structure verticale n'est pas résolue. Enfin, la vitesse angulaire est ajustée pour que le disque soit en équilibre à $t = 0$. En pratique, elle est très proche d'une valeur Keplerienne.

Le problème principal posé par ces simulations est celui de la résolution. En effet, une simple application de la relation (5.1) donne, pour $\beta = 4$ et $H/r = 0.1$:

$$|r_M - R_{pl}| = 3\times 10^{-2}\,. \tag{5.5}$$

Ainsi, si on veut pouvoir résoudre la distance entre l'orbite de la planète et les résonances magnétiques avec une dizaine de cellules, il faut utiliser environ 700 zones radiales étant donné les limites physiques de la grille (voir plus haut). Environ 2100 zones azimutales seraient alors nécessaires pour avoir des cellules de forme carrée, c'est à dire telles que $\Delta r \sim R_{pl}\Delta\phi$. Ce type de résolution est impossible à atteindre avec les moyens de calcul actuels, à moins d'utiliser des techniques de parallélisation et d'utiliser des machines

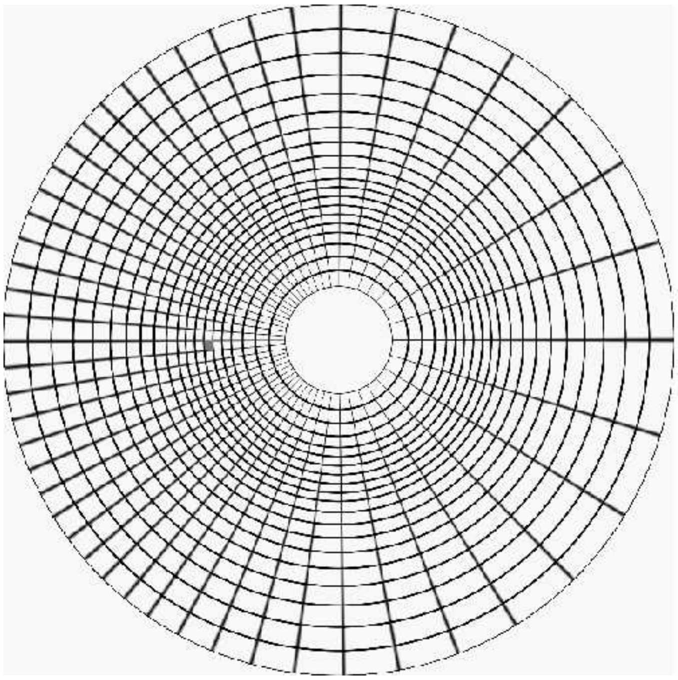

FIG. 5.5 – *Illustration de la grille logarithmique utilisée dans les simulations présentées dans ce chapitre. La taille des cellules est d'autant plus petite que l'on se rapproche de la planète, dont la position est représentée par la zone grisée.*

puissantes et coûteuses. Par exemple, la résolution maximale utilisée par Nelson *et al.* (2000) est $(N_r, N_\phi) = (130, 384)$. Une des solutions pourrait consister à utiliser un domaine de calcul plus petit, mais on peut craindre dans ce cas que les ondes excitées par la planète se réfléchissent sur les bords de la grille et perturbent le couple exercé par le disque sur la planète. Afin de résoudre ce problème, j'ai donc utilisé une grille particulière pour laquelle la résolution est plus grande autour de la planète que dans les régions dont elle est éloignée. Il faut pour cela se placer dans un référentiel dans lequel la planète est fixe. Dans ce repère non–galiléen tournant à la vitesse angulaire de la planète Ω_{pl}, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla}P - \rho\boldsymbol{\nabla}\Phi + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} - 2\rho\Omega_{pl}\boldsymbol{e_z}\times\boldsymbol{v} + \rho r\Omega_{pl}^2\boldsymbol{e_r}\,, \quad (5.6)$$

où $\boldsymbol{e_z}$ est le vecteur unitaire dans la direction verticale et les deux derniers termes du membre de droite sont la force de Coriolis et la force centrifuge. Dans les simulations présentées dans la suite, la planète est donc immobile au point de coordonnées $(r, \phi) = (1, \pi)$.

La grille utilisée est divisée en 3 zones dans les deux directions de l'espace. Dans la direction radiale, il y a tout d'abord une zone "tampon" de résolution uniforme autour de la planète. Elle s'étend entre les rayons R_{m1} et R_{m2} et la grille qui la décrit comporte N_1 cellules. Deux grilles logarithmiques la complètent aux rayons $r \leq R_{m1}$

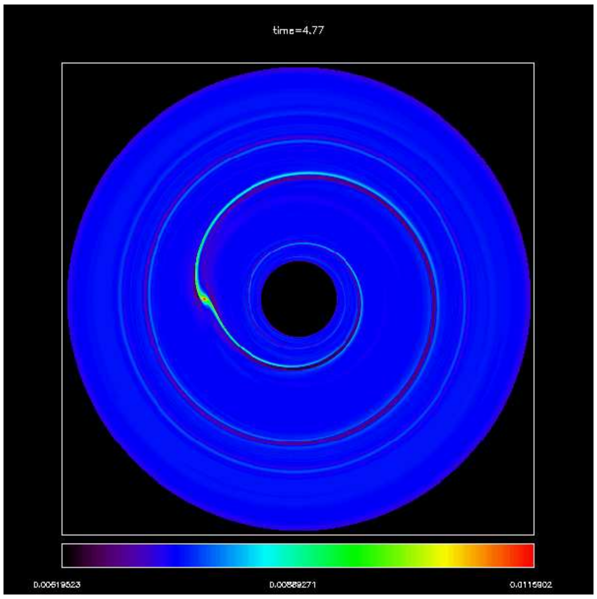

FIG. 5.6 – *Illustration de la densité dans le disque pour le modèle T3 qui utilise la grille logarithmique. La planète est fixe au rayon $R_{pl} = 1$ et à l'azimut $\phi = \pi$.*

et $r \geq R_{m2}$. Pour $r \in [R_{m2}, R_{max}]$, la taille des cellules augmente avec le rayon, c'est à dire $h = \Delta r_{i+1}/\Delta r_i > 1$, tandis que c'est l'inverse pour $r \in [R_{min}, R_{m1}]$. La procédure est la même dans la direction orthoradiale, où une plus grande résolution est utilisée autour de la planète. La structure typique d'une telle grille est illustrée sur la figure 5.5. La planète est représentée par la zone grisée. L'effet des grilles logarithmiques est exagéré sur cette figure afin de bien montrer l'augmentation de la taille des cellules loin de la planète. En pratique, j'ai utilisé $R_{m1} = 0.9$ et $R_{m2} = 1.1$ dans les simulations dont les résultats sont présentés dans la suite. La taille de la zone de résolution uniforme dans la direction ϕ est de $\pi/15$ et h est fixé à 1.02. Si on choisit $N_1 = 80$, cela donne une résolution radiale $\Delta r = 2.5 \times 10^{-3}$ dans la zone tampon, c'est à dire qu'il y a 12 cellules entre l'orbite de la planète et chacune des résonances magnétiques. La résolution globale qui en découle est alors $(N_r, N_\phi) = (286, 400)$ (noter que, pour la calculer, on impose que la taille minimum des cellules des grilles logarithmiques soit la même que celle des cellules de la grille uniforme). À titre de comparaison, il faut utiliser une grille de dimension $(N_r, N_\phi) = (840, 2520)$ pour obtenir une résolution équivalente autour de la planète avec une grille uniforme. Le gain est d'un facteur 20 en temps de calcul.

Dans le paragraphe suivant, je présente les tests que j'ai réalisés afin de valider l'utilisation de cette grille particulière.

5.2.2 Tests

Pour valider la méthode numérique présentée dans le paragraphe précédent, j'ai réalisé une série de simulations hydrodynamiques ($B = 0$). La masse de la planète est égale à $M_{pl} = 3 \times 10^{-5} M_*$, c'est à dire 10 masses terrestres si on utilise la convention

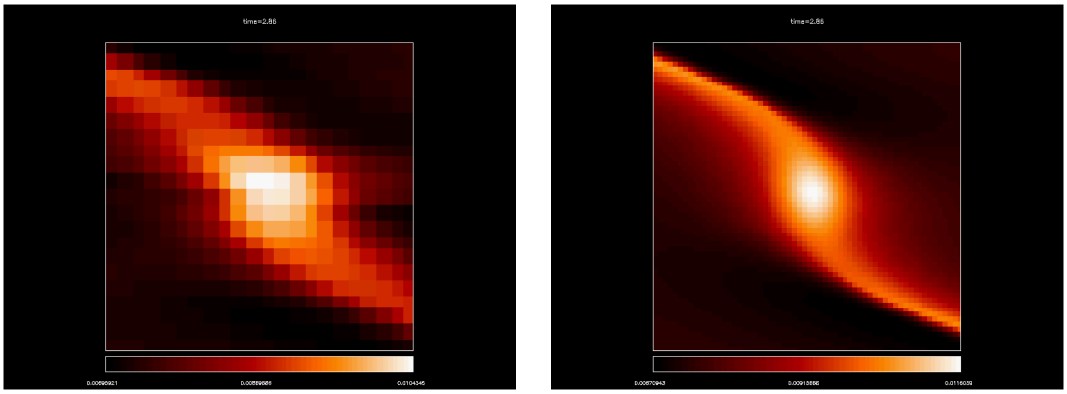

FIG. 5.7 – *Densité de masse dans le voisinage d'une planète de* 10 *masses terrestres. Dans chaque cas, la fenêtre couvre la zone* $r \in [0.9, 1.1]$ *en ordonnée et un intervalle de* $2\pi/15$ *dans la direction orthoradiale en abscisse. À gauche, la résolution est* $(N_r, N_\phi) = (200, 600)$ *et la grille est uniforme. À droite, la résolution est* $(N_r, N_\phi) = (242, 354)$ *et la grille est celle décrite dans la section 5.2.1. Les deux simulations sont purement hydrodynamiques et prennent environ le même temps de calcul. Le gain en résolution obtenu grâce à la grille logarithmique est important au voisinage de la planète.*

$M_* = 1M_\odot$. Les autres paramètres sont $\epsilon = 0.7H$ et $H/r = 0.04$.

Trois simulations ont été réalisées : la première (modèle T1) est effectuée dans un repère fixe (la planète se déplace sur la grille) et la grille est uniforme, de résolution $(N_r, N_\phi) = (200, 600)$. Le modèle T2 utilise la même grille et la même résolution, mais le calcul est fait dans le repère tournant. Enfin, la grille logarithmique est utilisée dans le modèle T3. Il y a 60 zones dans la zone tampon, de sorte que $\Delta r = 3.3 \times 10^{-3}$ contre 1.05×10^{-2} pour les modèles T1 et T2. La résolution globale est $(N_r, N_\phi) = (242, 354)$. Le temps de calcul est comparable pour les trois modèles. La masse de la planète est trop faible pour ouvrir un sillon autour de son orbite ; on est dans le cas de la migration de type I. La structure de la densité dans le disque obtenue avec le modèle T3 est représentée sur la figure 5.6. La planète est fixe au point de coordonnées $(R_{pl}, \phi_{pl}) = (1, \pi)$ et la perturbation gravitationnelle qu'elle produit crée deux ondes spirales qui se propagent de part et d'autre de son orbite. Des images similaires du disque à grande échelle sont obtenues avec les modèles T1 et T2. L'intérêt de la grille logarithmique apparaît lorsqu'on compare des images du disque au voisinage de la planète, comme c'est le cas sur la figure 5.7. Les deux images comparent la densité de masse dans le domaine $r \in [0.9, 1.1]$ et $\phi \in [\pi - 2\pi/15, \pi + 2\pi/15]$. L'image de gauche correspond au modèle T1 et l'image de droite au modèle T3. L'amélioration de la résolution apportée par la grille logarithmique est spectaculaire. Pour comparer quantitativement les trois modèles, j'ai calculé le couple exercé par la partie interne du disque sur la planète (T_{in}) et celui exercé par la partie externe du disque (T_{out}). Le signe de leur somme donne le sens de migration (positif pour une migration vers les parties externes du disque, négatif dans le cas contraire). Ils sont définis par la relation :

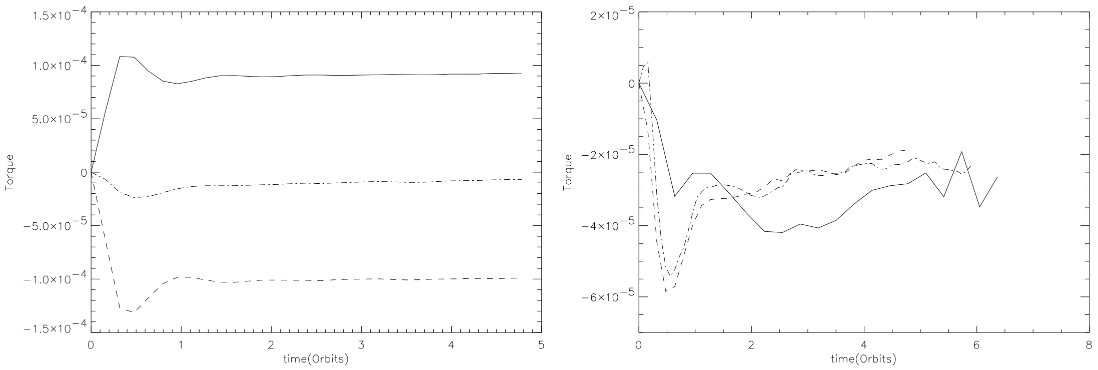

FIG. 5.8 – *La figure de gauche montre la variation du couple qui est exercé par la partie interne du disque sur la planète (courbe en trait plein) et par la partie externe (courbe en traits tirets) pour le modèle T3. La courbe en traits points-tirets est la somme des deux. La figure de droite compare le couple total obtenu dans les modèles T1 (courbe en trait plein), T2 (courbe en traits tirets) et T3 (courbe en points-tirets).*

$$T_{in} = \int_{R_{min}}^{R_{pl}} \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma_d r \sin(\phi - \phi_{pl}) d\sigma}{(r^2 + R_{pl}^2 - 2rR_{pl}\cos(\phi - \phi_{pl}))^{3/2}} \quad (5.7)$$

$$T_{out} = \int_{R_{pl}}^{R_{max}} \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma_d r \sin(\phi - \phi_{pl}) d\sigma}{(r^2 + R_{pl}^2 - 2rR_{pl}\cos(\phi - \phi_{pl}))^{3/2}} \quad (5.8)$$

où $d\sigma = rdrd\phi$ est l'élément de surface du disque. T_{in} et T_{out} sont en fait les valeurs des couples normalisés par le produit $GM_{pl}R_{pl}$. La figure 5.8 représente leur variation temporelle dans le cas du modèle T3 (*partie gauche*). La courbe en trait plein donne le couple exercé par les parties internes du disque. Il est positif, c'est à dire que cette partie du disque donne du moment cinétique à la planète. La courbe en traits tirets représente le couple exercé par les parties externes du disque ; il est négatif. La somme est donnée par la courbe en points–tirets. Elle est négative et à peu près stationnaire à partir de $t = 1$ orbite, c'est à dire que la planète perd du moment cinétique et migre vers les parties internes du disque (en théorie, puisque son orbite est maintenue fixe dans le code). La partie droite de la figure 5.8 compare le couple total exercé sur la planète pour les modèles T1 (*courbe en trait plein*), T2 (*courbe en traits tirets*) et T3 (*courbe en points–tirets*). Elle montre que la valeur du couple total qui est obtenue est assez similaire pour les 3 modèles et comprise entre -2×10^{-5} et -4×10^{-5}. Le modèle T1 présente une dispersion plus grande, mais cela est attendu car d'une part sa résolution est plus faible que celle du modèle T3 et, d'autre part, la dissipation au voisinage de l'orbite de la planète y est plus grande que dans le modèle T2, réalisé dans le repère tournant. À partir de cette valeur du couple total $\Delta\tilde{T} = \Delta T/(GM_{pl}R_{pl})$, il est possible de calculer le temps caractéristique de migration τ_{mig} :

$$\tau_{mig} = \frac{R_{pl}}{\dot{R}_{pl}} = \frac{M_{pl} R_{pl}^2 \Omega_{pl}}{2|\Delta T|} . \tag{5.9}$$

Pour une planète située à 5 UA de l'étoile centrale, on obtient un temps de migration compris entre 4×10^4 et 8×10^4 ans. Cette valeur est à comparer aux résultats analytiques obtenus par Tanaka *et al.* (2002) :

$$\tau_{mig} = \frac{1}{2.7\Omega_{pl}} \frac{M_*}{M_{pl}} \frac{M_*}{\Sigma R_{pl}^2} \left(\frac{c}{R_{pl}\Omega_{pl}} \right)^2 . \tag{5.10}$$

Avec les valeurs numériques des modèles T1, T2 et T3, on obtient $\tau_{mig} = 5.8 \times 10^4$ années, en accord avec les résultats des simulations. Ce résultat valide l'utilisation de la grille logarithmique présentée ci–dessus.

5.3 Interaction disque/planète de faible masse

Cette partie s'intéresse aux résultats des simulations MHD. L'état initial est un peu différent de celui utilisé dans le paragraphe précédent. En particulier, afin d'augmenter au maximum la distance entre l'orbite de la planète et les résonances magnétiques, on utilise $H/r = 0.1$. De plus, la valeur du paramètre ϵ est choisie égale à $0.1H$, ce qui permet d'estimer de manière correcte le potentiel gravitationnel au niveau des résonances magnétiques. La masse de la planète est $M_{pl} = 3 \times 10^{-6} M_*$, c'est à dire 1 masse terrestre si $M_* = 1 M_\odot$. Pour choisir la valeur du champ magnétique, on pourrait s'inspirer des résultats des simulations numériques de l'instabilité MRI. Elles montrent que $\beta \sim 10 - 100$ (Balbus & Hawley, 1998; Steinacker & Papaloizou, 2002), ce qui conduit à $|r_M - R_{pl}| \sim 6 - 20 \times 10^{-3}$. Malheureusement, les résolutions nécessaires pour résoudre les résonances magnétiques dans ce cas sont énormes et elles supposeraient des temps de calculs de plusieurs mois par simulation. Nous avons donc opté pour $\beta = 4$ en $r = R_{pl}$.

Le paragraphe 5.3.1 présente les résultats du modèle M1, pour lequel B est uniforme. Il met en particulier en évidence l'existence de ces résonances magnétiques et compare les résultats analytiques aux résultats numériques. Dans le paragraphe 5.3.2, nous verrons comment la migration planétaire dépend du profil radial du champ magnétique, à travers les résultats des modèles M2 et M3, pour lesquels $B \propto r^{-1}$ et $B \propto r^{-2}$ respectivement.

5.3.1 Mise en évidence des résonances magnétiques

La figure 5.9 illustre les résultats du modèle M1. La partie gauche de cette figure représente l'intensité de B_ϕ dans le plan (ϕ, r) au voisinage de la planète, après 11.1 orbites. Sa position est montrée par la croix blanche tandis que le cercle qui l'entoure a un rayon égal au paramètre ϵ. Les résonances magnétiques apparaissent nettement

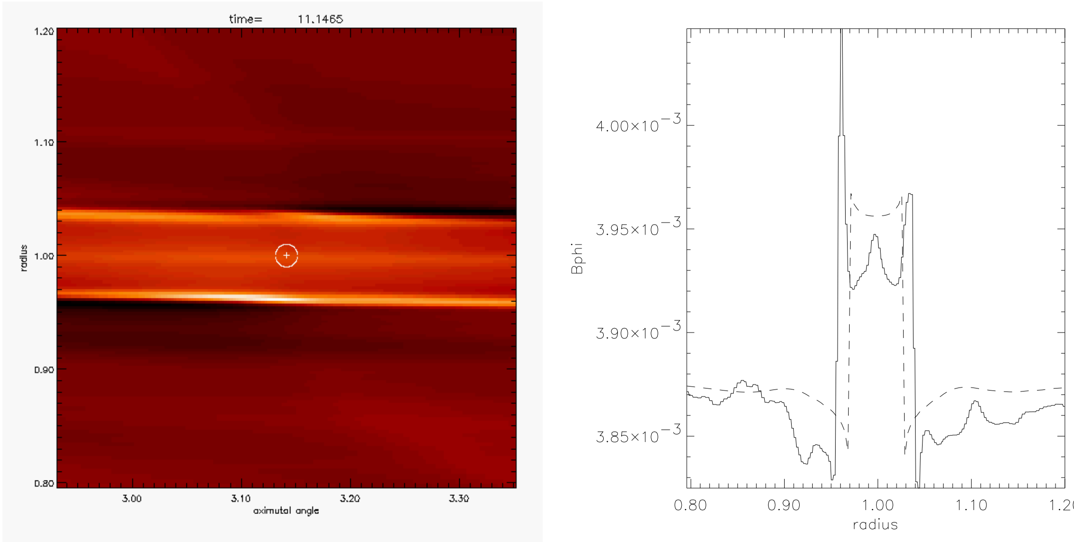

FIG. 5.9 – *La figure de gauche représente l'intensité de la composante orthoradiale du champ magnétique B_ϕ dans le plan (ϕ, r) après* 11.1 *orbites (modèle M1 dans lequel B est uniforme). Les résonances magnétiques sont bien visibles de part et d'autre de l'orbite de la planète. La figure de droite montre une coupe de cette image en $\phi = \phi_{pl}$ (trait plein). La courbe en traits tirets correspond au profil calculé analytiquement.*

de part et d'autre de l'orbite de la planète. Le champ magnétique y est amplifié par rapport à sa valeur initiale. La partie droite de la figure 5.9 montre en trait plein le profil radial de B_ϕ à l'azimut $\phi = \phi_{pl}$ entre les rayons $r = 0.8$ et $r = 1.2$. La courbe en traits tirets est issue des calculs analytiques linéaires de Terquem (2003). Les deux courbes ont un profil assez similaire, même si la position exacte des résonances diffère. En effet, le résultat théorique donne $|r_M - R_{pl}| = 3.0 \times 10^{-2}$ tandis que la valeur obtenue numériquement est plutôt de l'ordre de 3.5 à 4×10^{-2}. Cette différence peut probablement être expliquée par un effet de résolution car la taille d'une cellule est $\Delta r = 2.5 \times 10^{-3}$. L'écart entre les valeurs théoriques et numériques est donc de l'ordre de 2 à 4 cellules.

De nombreuses fluctuations de faible amplitude sont visibles sur la partie droite de la figure 5.9. Elles sont également présentes dans le profil radial des autres variables du problème (en particulier la densité). Ces fluctuations sont causées par des ondes qui se réfléchissent sur les bords du domaine de calcul et interfèrent avec les perturbations causées par la planète. Elles sont peu amorties car la résolution utilisée est grande, ce qui rend la dissipation numérique très faible. Elles posent des problèmes importants pour faire des diagnostics quantitatifs et pour étudier l'évolution à long terme des résonances magnétiques.

La figure 5.10 illustre également la présence de ces résonances en montrant la variation du couple exercé par le disque sur la planète en fonction de la distance à la planète. Plus précisément, la courbe en trait plein représente la fonction

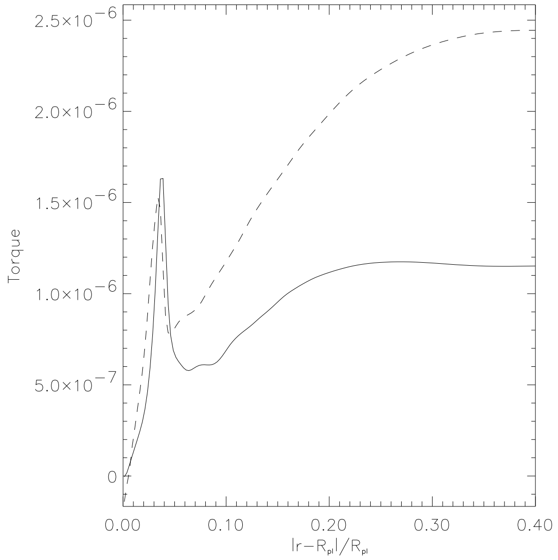

FIG. 5.10 – *Couples cumulatifs exercés par la partie interne du disque (courbe en trait plein) et par la partie externe (la courbe en traits tirets représente l'opposé du couple) sur la planète pour le modèle M1. Chaque courbe est une moyenne temporelle entre* 8.75 *et* 9.55 *orbites.*

$$T_{in}(r) = \int_r^{R_{pl}} \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma r \sin(\phi - \phi_{pl}) d\sigma}{(r^2 + R_{pl}^2 - 2rR_{pl}\cos(\phi - \phi_{pl}))^{3/2}} \tag{5.11}$$

en fonction de la quantité $|r - R_{pl}|/R_{pl}$. La courbe en traits tirets représente la quantité $-T_{out}(r)$, dont la définition est similaire (l'intégrale allant alors de R_{pl} à r). Noter que les deux courbes ont été moyennées entre 8.75 et 9.55 orbites pour diminuer l'effet des fluctuations numériques mentionnées ci–dessus. Comme sur la figure 5.9, les résonances magnétiques sont évidentes. L'amplification de B_ϕ en $r = r_M$ entraîne en effet une diminution de la densité, ce qui provoque un comportant singulier du couple à cet endroit. La figure 5.10 montre également que le couple exercé par la partie extérieure du disque est plus grand en valeur absolue que le couple exercé par la partie interne. Le couple total est donc négatif, la planète migre vers l'intérieur du disque. La présence d'un champ magnétique uniforme n'a donc pas d'effet sur le sens de la migration, conformément aux résultats analytiques (Terquem, 2003). Le paragraphe suivant examine le cas d'un champ non–uniforme et son effet sur la direction du mouvement de la planète.

5.3.2 Effet du profil radial du champ magnétique

Les résultats analytiques (Terquem, 2003) montrent que le couple exercé par le disque au niveau de chacune des résonances magnétiques est d'autant plus grand que l'intensité du champ est importante. Dans les cas où celle–ci diminue avec le rayon, on s'attend donc à ce que l'influence de la résonance externe diminue au profit de la

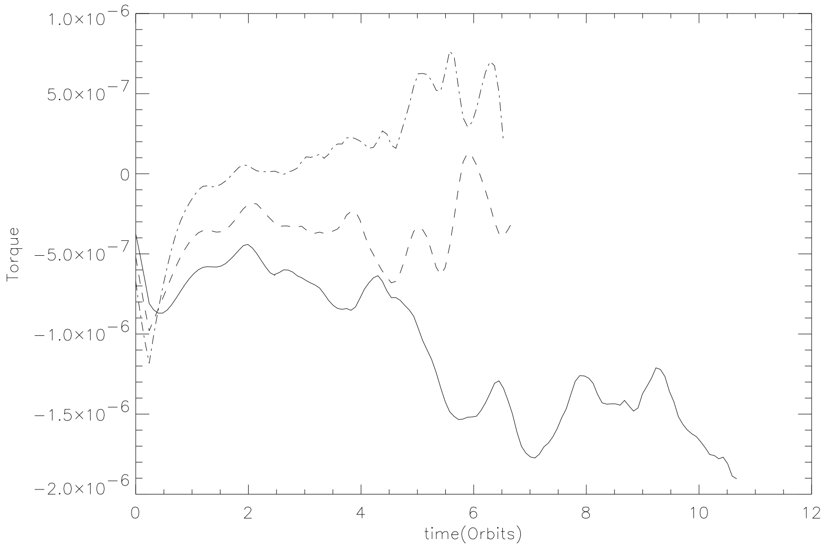

FIG. 5.11 – *Variation temporelle du couple total exercé par le disque sur la planète pour les modèles M1 (courbe en trait plein), M2 (courbe en traits tirets) et M3 (courbe en points–tirets). Les trois courbes ont été lissées sur une fenêtre temporelle de largeur égale à* 0.4 *orbite.*

résonance interne, qui exerce un couple positif sur la planète. Le couple total est donc d'autant plus élevé que le champ magnétique diminue rapidement avec le rayon.

Les modèles M2 et M3 étudient cette possibilité. B_ϕ est proportionnel à r^{-1} dans le premier cas, à r^{-2} dans le second. La figure 5.11 compare les évolutions temporelles du couple total $\Delta\tilde{T}$ exercé par le disque sur la planète pour les modèles M1 (*courbe en trait plein*), M2 (*courbe en traits tirets*) et M3 (*courbe en points–tirets*). Comme pour le modèle M1, des fluctuations de faible amplitude apparaissent dans les simulations M2 et M3 et diminuent la qualité des résultats. Pour obtenir une meilleure visualisation, les courbes de la figure 5.11 ont donc été lissées sur une plage temporelle égale à 0.4 orbite. Comme prévu, cette figure montre une augmentation du couple lorsque le champ magnétique décroît radialement. La courbe correspondant au modèle M3 est située au dessus de celle du modèle M2, ce qui montre que l'augmentation du couple est d'autant plus grande que la décroissance de B_ϕ est rapide. Dans le cas du modèle M3, $\Delta\tilde{T}$ atteint même des valeurs positives, correspondant à une migration vers l'extérieur du disque. Cependant, pour chacun des modèles, $\Delta\tilde{T}$ présente des variations assez importantes. Il est donc difficile de faire un diagnostic précis en calculant par exemple un temps caractéristique de migration comme dans le cas des simulations hydrodynamiques.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai étudié le problème de la migration des planètes de faible masse (c'est à dire de l'ordre de la masse de La Terre) dans un disque d'accrétion magnétisé. En effet, une étude récente de Terquem (2003) prédit l'apparition de deux résonances de part et d'autre de l'orbite de la planète en présence d'un champ magnétique orthoradial. Ces résonances affectent le couple que le disque exerce sur la planète. Pour étudier ce phénomène, j'ai effectué des simulations bidimentionnelles en utilisant une version 2D du code *GLOBAL*. Une grille logarithmique a été spécialement développée pour bien résoudre les résonances magnétiques qui sont situées très près de la planète. Cette grille a été validée par des simulations hydrodynamiques dont les résultats ont été comparés à des simulations réalisées avec une grille uniforme et à des prédictions analytiques.

En accord avec les résultats linéaires, les simulations MHD ont permis de mettre en évidence les deux résonances magnétiques, ainsi que la rapide variation du couple exercé par le disque sur la planète à ces résonnances. Lorsque l'intensité du champ diminue avec le rayon, les simulations ont montré que le couple exercé sur la planète augmente. Plus précisément, si $\beta = 4$ au rayon orbital de la planète et si le disque est caractérisé par $H/r = 0.1$, le couple devient positif lorsque l'intensité du champ magnétique décroît plus vite que $1/r^2$. Les simulations font apparaître de nombreuses perturbations parasites dont l'amplitude est comparable à celle du phénomène étudié. Elles ne sont pas dissipées car la résolution élevée limite les phénomènes dissipatifs. Elles sont d'origine purement numérique, dues à des réflexions d'ondes sur les bords du domaine et également au fait que le disque est pratiquement au repos au voisinage de l'orbite de la planète (car les simulations sont effectuées dans un repère tournant dans lequel la planète ne se déplace pas). Une solution pour améliorer les résultats de ce chapitre serait d'ajouter une viscosité artificielle (par exemple de type α) afin de mieux stabiliser l'écoulement. Il sera aussi important à l'avenir de réaliser les mêmes simulations pour des planètes plus massives, susceptibles d'ouvrir un sillon dans le disque. En effet, le couple important exercé au niveau des résonances magnétiques aura probablement un effet sur la vitesse d'ouverture du sillon et/ou sa profondeur.

Malgré les problèmes numériques décrits ci–dessus, les résultats qui sont présentés dans ce chapitre sont importants car ils sont susceptibles d'apporter une réponse au problème de la migration des planètes de faible masse. En effet, à cause de l'accrétion de matière vers les parties centrales du disque, le champ est advecté vers les petits rayons. On s'attend donc à ce qu'il décroisse radialement. Cependant, nous avons vu au cours de cette thèse que les disques faiblement magnétisés sont instables et turbulents. Que deviennent donc ces résonances magnétiques dans un disque turbulent ? Cela est d'autant plus important qu'elles sont liées à la propagation des ondes MHD lentes, qui sont justement les ondes qui sont déstabilisées par l'instabilité MRI. Nelson & Papaloizou (2004) ont réalisé des simulations MHD de migration de type I dans un disque turbulent, mais leur résolution, même si elle est déjà impressionnante, n'est pas suffisante pour résoudre les résonances magnétiques. C'est un calcul qu'il sera important de faire dans le futur, lorsque l'amélioration de la puissance de calcul des machines modernes permettra d'atteindre la résolution adéquate.

Même si ces résonances disparaissent dans un disque turbulent, les résultats qui sont présentés dans ce chapitre s'appliquent à l'interface entre une zone morte et une zone active magnétisée (voir chapitre 1). La migration d'une planète est susceptible de s'arrêter à cette interface, ce qu'il faudra là encore confirmer par des simulations numériques.

Enfin, près de l'étoile, le disque est traversé par le champ magnétique de l'étoile, qui est d'autant plus fort que la planète se rapproche de l'étoile. Par le même mécanisme que celui étudié dans ce chapitre, ce gradient de champ magnétique peut lui aussi stopper la migration planétaire à quelques rayons stellaires, ce qui serait une façon naturelle d'expliquer l'existence des "Jupiter-chaudes".

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Au cours de ma thèse, je me suis intéressé principalement à l'évolution des disques d'accrétion massifs et magnétisés, présents pendant les premières phases de la formation stellaire et autour des trous noirs supermassifs dans les galaxies à noyaux actifs (AGN). Deux mécanismes sont susceptibles de transporter le moment cinétique vers les parties externes du disque et la masse vers les parties internes. Il s'agit de l'instabilité magnéto-rotationnelle, qui conduit à la turbulence MHD, et de l'instabilité gravitationnelle, responsable de la formation de bras spiraux. Le but de cette thèse a été d'étudier l'interaction entre ces deux instabilités.

Des simulations numériques 2D ont été réalisées dans un premier temps. À cause de la symétrie cylindrique, l'instabilité gravitationnelle n'apparaît pas, ce qui permet de se concentrer sur l'instabilité MRI. Nous avons ainsi pu vérifier que son comportement est qualitativement le même que dans les disques de faible masse : la phase linéaire de l'instabilité conduit à la turbulence MHD. Le profil de rotation est modifié par le transport de moment cinétique qui en résulte. Il est Keplerien dans les parties internes du disque, mais pas dans les parties externes, où l'auto–gravité du disque est importante. Un tel profil est en accord avec les courbes de rotation observées dans certains AGN.

Dans une deuxième partie, j'ai réalisé des simulations 3D dans différents régimes thermodynamiques en comparant les résultats hydrodynamiques et MHD. Lorsque l'équation d'état est adiabatique, la turbulence affecte les modes gravitationnellement instables. Un mode supplémentaire apparaît par rapport aux simulations hydrodynamiques et les différents modes présents interfèrent non–linéairement. Le taux d'accrétion sur l'objet central varie périodiquement dans le temps à cause de cette interaction. Lorsque le disque est isotherme, j'ai montré que la turbulence MHD supprimait la fragmentation du disque qui est observée dans les modèles hydrodynamiques. Ce résultat pose de sérieuses contraintes aux modèles de formation planétaire par instabilité gravitationnelle. Enfin, des modèles dans lesquels le refroidissement du disque est pris en compte ont permis de confirmer le scénario d'auto–régulation du disque avancé par Paczynsky (1978) : il évolue vers un état quasi–permanent dans lequel $Q \sim 1$.

Ces simulations numériques sont les premières dans lesquelles on étudie l'évolution des disques d'accrétion sous l'action simultanée de la turbulence MHD et des instabilités gravitationnelles. Elles utilisent cependant des conditions initiales un peu trop académiques. En effet, il est probable que le transport de moment cinétique dans les disques commence en même temps que leur formation. L'objectif à court terme est donc maintenant de décrire la formation du disque lors de l'effondrement du coeur dense. Bodenheimer *et al.* (1990), Yorke *et al.* (1993) et Yorke & Bodenheimer (1999) ont présenté une série d'études 2D au cours desquelles ils suivent cet effondrement. Avec l'amélioration des machines de calcul et en utilisant une grille logarithmique comme dans le chapitre 5, il est maintenant possible d'étendre cette étude à 3D avec *GLOBAL*, ce qui permet de traiter de manière cohérente les phénomènes de transport. Une étude préliminaire a déjà donné des résultats encourageants ; elle sera poursuivie dans les mois qui viennent en collaboration avec Sabine Richling, post-doc à l'Institut d'Astrophysique de Paris. Enfin, de tels modèles pourront aussi être appliqués à l'étude de l'effondrement des étoiles de très grande masse, qui sont supposées être à l'origine des "gamma-ray bursts", au cours desquels un disque massif se forme autour d'un trou noir de quelques masses solaires (Proga *et al.* , 2003).

Finalement, la dernière partie de cette thèse, un peu différente, est consacrée à une étude de la migration des planètes de faible masse dans un disque magnétisé non turbulent. Elle a confirmée l'existence de deux résonances magnétiques de part et d'autre de l'orbite de la planète, qui influencent le couple exercé par le disque sur la planète. Lorsque le champ magnétique décroît avec le rayon, il est possible d'inverser son sens de migration.

Au cours de mon travail, j'ai découvert le domaine très riche des disques d'accrétion, à l'interface entre la formation stellaire et la formation planétaire, et qui est aussi une porte ouverte sur les noyaux actifs de galaxies, les variables cataclysmiques, les microquasars ou les "gamma-ray bursts". Pendant mon post–doc, que j'effectuerai à l'université Queen Mary, à Londres, je pense développer des modèles de disques qui prennent en compte les effets non–idéaux de la MHD, si importants pour les disques protoplanétaires, et travailler aussi sur la dynamique des poussières dans les disques turbulents. Ce dernier projet, néccessaire pour une meilleure compréhension des premières phases de la formation planétaire, sera mené en collaboration avec l'École Normale Supérieure de Lyon.

Bibliographie

Abramowitz, M., & Stegun, I.A. 1965. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York : Dover.

Andre, P., Ward-Thompson, D., & Barsony, M. 2000. From Prestellar Cores to Protostars : the Initial Conditions of Star Formation. *Protostars and Planets IV*, 59.

Armitage, P. J. 1998. Turbulence and Angular Momentum Transport in Global Accretion Disk Simulation. *ApJ*, **501**, L189.

Balbus, S. A. 2003. Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks. *ARA&A*, **41**, 555–597.

Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 2000. Solar Nebula Magnetohydrodynamics. *Page 39 of : From Dust to Terrestrial Planets.*

Balbus, S.A., & Hawley, J.F. 1991. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. *ApJ*, **376**, 214.

Balbus, S.A., & Hawley, J.F. 1998. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Rev.Mod.Phys.*, **70**, 1.

Balbus, S.A., & Papaloizou, J.C.B. 1999. On the Dynamical Foundations of alpha Disks. *ApJ*, **521**, 650.

Basri, G., & Bertout, C. 1993. T Tauri stars and their accretion disks. *Pages 543–566 of : Protostars and Planets III.*

Bate, M. R. 1998. Collapse of a Molecular Cloud Core to Stellar Densities : The First Three-dimensional Calculations. *ApJ*, **508**, L95–L98.

Binney, J., & Tremaine, S. 1987. *Galactic dynamics.* Princeton University Press.

Bodenheimer, P., Yorke, H. W., Rozyczka, M., & Tohline, J. E. 1990. The formation phase of the solar nebula. *ApJ*, **355**, 651–660.

Bodenheimer, P., Hubickyj, O., & Lissauer, J. J. 2000. Models of the in Situ Formation of Detected Extrasolar Giant Planets. *Icarus*, **143**, 2–14.

Boss, A. P. 1998. Evolution of the Solar Nebula. IV. Giant Gaseous Protoplanet Formation. *ApJ*, **503**, 923.

Boss, A. P. 2002. Evolution of the Solar Nebula. V. Disk Instabilities with Varied Thermodynamics. *ApJ*, **576**, 462–472.

Brandenburg, A., Nordlund, A., Stein, R. F., & Torkelsson, U. 1995. Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow. *ApJ*, **446**, 741.

Ceccarelli, C., Dominik, C., Lefloch, B., Caselli, P., & Caux, E. 2004. Detection of H2D+ : Measuring the midplane degree of ionization in the disks of DM Tau and TW Hya. *ApJ*, in press.

Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W., & Mayor, M. 2000. Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star. *ApJ*, **529**(Jan.), L45–L48.

Childress, S., & Gilbert, A.D. 1995. *Stretch,twist,fold : the fast dynamo.* Springer.

Cohl, H. S., & Tohline, J. E. 1999. A Compact Cylindrical Green's Function Expansion for the Solution of Potential Problems. *ApJ*, **527**, 86–101.

De Villiers, J., Hawley, J. F., & Krolik, J. H. 2003. Magnetically Driven Accretion Flows in the Kerr Metric. I. Models and Overall Structure. *ApJ*, **599**, 1238–1253.

Dutrey, A., Guilloteau, S., & Simon, M. 1994. Images of the GG Tauri rotating ring. *A&A*, **286**, 149–159.

Evans, C., & Hawley, J.F. 1988. Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, **33**, 659.

Falgarone, E., Puget, J.-L., & Perault, M. 1992. The small-scale density and velocity structure of quiescent molecular clouds. *A&A*, **257**, 715–730.

Fleming, T. P., Stone, J. M., & Hawley, J. F. 2000. The Effect of Resistivity on the Nonlinear Stage of the Magnetorotational Instability in Accretion Disks. *ApJ*, **530**, 464–477.

Fromang, S., Terquem, C., & Balbus, S. A. 2002. The ionization fraction in α models of protoplanetary discs. *MNRAS*, **329**, 18–28.

Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F.X., Zingale, M., Lamb, D.Q., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J.W., & Tufo, H. soumis. FLASH : An adaptive mesh hydrodynamics code for modeling astrophysical thermonuclear flashes. *ApJS*.

Gammie, C. F. 1996. Layered Accretion in T Tauri Disks. *ApJ*, **457**, 355.

Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *MNRAS*, **181**, 375–389.

Glassgold, A. E., Najita, J., & Igea, J. 1997. X-Ray Ionization of Protoplanetary Disks. *ApJ*, **480**(May), 344.

Glassgold, A. E., Feigelson, E. D., & Montmerle, T. 2000. Effects of Energetic Radiation in Young Stellar Objects. *Protostars and Planets IV*, May, 429–+.

Goldreich, P., & Tremaine, S. 1979. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, **233**, 857–871.

Goldreich, P., & Tremaine, S. 1980. Disk-satellite interactions. *ApJ*, **241**(Oct.), 425–441.

Goodman, A. A., Benson, P. J., Fuller, G. A., & Myers, P. C. 1993. Dense cores in dark clouds. VIII - Velocity gradients. *ApJ*, **406**, 528–547.

Hachisu, I. 1986. A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars. II - Three-dimensional self-consistent field method. *ApJS*, **62**, 461–499.

Hartmann, L. 1998. *Accretion processes in star formation.* Accretion processes in star formation / Lee Hartmann. Cambridge, UK ; New York : Cambridge University Press, 1998. (Cambridge astrophysics series ; 32) ISBN 0521435072.

Hawley, J. F. 2000. Global Magnetohydrodynamical Simulations of Accretion Tori. *ApJ*, **528**, 462–479.

Hawley, J. F. 2001. Global Magnetohydrodynamic Simulations of Cylindrical Keplerian Disks. *ApJ*, **554**, 534–547.

Hawley, J. F., & Balbus, S. A. 1991. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. II. Nonlinear Evolution. *ApJ*, **376**, 223.

Hawley, J. F., & Balbus, S. A. 1992. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. III - Long-term evolution in a shearing sheet. IV - Nonaxisymmetric perturbations. *ApJ*, **400**, 595–621.

Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. 1995. Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *ApJ*, **440**, 742.

Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. 1996. Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo. *ApJ*, **464**, 690.

Hawley, J. F., Balbus, S. A., & Winters, W. F. 1999. Local Hydrodynamic Stability of Accretion Disks. *ApJ*, **518**, 394–404.

Hawley, J.F., & Stone, J.M. 1995. MOCCT : A numerical technique for astrophysical MHD. *Comput. Phys. Commun.*, **89**, 127.

Hennebelle, P., Whitworth, A. P., Cha, S.-H., & Goodwin, S. P. 2004. Protostellar collapse induced by compression - II. Rotation and fragmentation. *MNRAS*, **348**, 687–701.

Jackson, J.D. 1975. *Classical Electrodynamics.* New York : Wiley.

Lachaume, R. 2003. *Structure des disques d'accrétion autour étoiles jeunes de faible masse.* Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier.

Larson, R. B. 1969. Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star. *MNRAS*, **145**, 271.

Larson, R. B. 2003. The physics of star formation. *Reports of Progress in Physics*, **66**, 1651–1697.

Laughlin, G., Korchagin, V., & Adams, F.C. 1997. Spiral Mode Saturation in Self-gravitating Disks. *ApJ*, **477**, 410.

Longaretti, P. 2002. On the Phenomenology of Hydrodynamic Shear Turbulence. *ApJ*, **576**, 587–598.

Lucy, L. B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *AJ*, **82**, 1013–1024.

Lynden-Bell, D., & Pringle, J. E. 1974. The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, **168**, 603–637.

Mac Low, M., & Klessen, R. S. 2004. Control of star formation by supersonic turbulence. *Reviews of Modern Physics*, **76**, 125–194.

Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2002. Formation of Giant Planets by Fragmentation of Protoplanetary Disks. *Science*, **298**, 1756.

Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2004. The evolution of gravitationally unstable protoplanetary disks : fragmentation and possible giant planet formation. *ApJ*, soumis (astro–ph 0310771).

Mayor, M., & Queloz, D. 1995. A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star. *Nature*, **378**, 355.

Nelson, R.P., & Papaloizou, J.C.B. 2004. The interaction of planets with a disc with MHD turbulence IV : Migration rates of embedded protoplanets. *MNRAS*, sous presse (astro–ph 0308360).

Nelson, R.P., Papaloizou, J.C.B., Masset, F., & Kley, W. 2000. The migration and growth of protoplanets in protostellar discs. *MNRAS*, **318**, 18.

Ostriker, J. P., & Mark, J. W.-K. 1968. Rapidly rotating stars. I. The self-consistent-field method. *ApJ*, **151**, 1075–1088.

Paczynsky, B. 1978. A model of selfgravitating accretion disk. *AcA*, **28**, 91.

Papaloizou, J. C. B. 2002. Global m = 1 modes and migration of protoplanetary cores in eccentric protoplanetary discs. *A&A*, **388**, 615–631.

Papaloizou, J. C. B., & Larwood, J. D. 2000. On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. *MNRAS*, **315**, 823–833.

Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 1999. Critical Protoplanetary Core Masses in Protoplanetary Disks and the Formation of Short-Period Giant Planets. *ApJ*, **521**, 823–838.

Papaloizou, J.C., & Savonije, G.J. 1991. Instabilities in self-gravitating gaseous discs. *MNRAS*, **248**, 353.

Penston, M. V. 1969. Dynamics of self-gravitating gaseous spheres-III. Analytical results in the free-fall of isothermal cases. *MNRAS*, **144**, 425.

Pickett, B.K., Durisen, R.H., & Davis, G.A. 1996. The Dynamic Stability of Rotating Protostars and Protostellar Disks. I. The Effects of the Angular Momentum Distribution. *ApJ*, **458**, 714.

Pickett, B.K., Casse, P., Durisen, R.H., & Link, R. 1998. The Effects of Thermal Energetics on Three-dimensional Hydrodynamic Instabilities in Massive Protostellar Disks. *ApJ*, **504**, 468.

Pickett, B.K., Cassen, P., Durisen, R.H., & Link, R. 2000a. The Effects of Thermal Energetics on Three-dimensional Hydrodynamic Instabilities in Massive Protostellar Disks. II. High-Resolution and Adiabatic Evolutions. *ApJ*, **529**, 1034.

Pickett, B.K., Durisen, R.H., Cassen, P., & Mejia, A.C. 2000b. Protostellar Disk Instabilities and the Formation of Substellar Companions. *ApJ*, **540**, L95.

Pickett, B.K., Mejia, A.C., Durisen, R.H., Cassen, P., Berry, D.K., & Link, R.P. 2003. The Thermal Regulation of Gravitational Instabilities in Protoplanetary Disks. *ApJ*, **590**, 1060.

Pollack, J.B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J.J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996. Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. *Icar*, **124**, 62.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. 1986. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press.

Price, D. J., & Monaghan, J. J. 2004a. Smoothed Particle Magnetohydrodynamics - I. Algorithm and tests in one dimension. *MNRAS*, **348**, 123–138.

Price, D. J., & Monaghan, J. J. 2004b. Smoothed Particle Magnetohydrodynamics - II. Variational principles and variable smoothing-length terms. *MNRAS*, **348**, 139–152.

Proga, D., MacFadyen, A. I., Armitage, P. J., & Begelman, M. C. 2003. Axisymmetric Magnetohydrodynamic Simulations of the Collapsar Model for Gamma-Ray Bursts. *ApJ*, **599**, L5–L8.

Rice, W.K.M., Armitage, P.J., Bonnell, I.A., Bate, M.R., Jeffers, S.V., & Vine, S. G. 2003. The effect of cooling on the global stability of self-gravitating protoplanetary discs. *MNRAS*, **339**, 1025.

Richard, D., & Zahn, J. 1999. Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment. *A&A*, **347**, 734–738.

Segura, J., & Gil, A. 1999. Evaluation of associated Legendre functions off the cut and parabolic cylinder functions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **9**, 137.

Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, **24**, 337–355.

Shu, F. H. 1977. Self-similar collapse of isothermal spheres and star formation. *ApJ*, **214**, 488–497.

Shu, F. H. 1992. *Physics of Astrophysics, Vol. II.* Physics of Astrophysics, Vol. II, by Frank H. Shu. Published by University Science Books, ISBN 0-935702-65-2, 476pp, 1992.

Steinacker, A.S., & Papaloizou, J.C.B. 2002. Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of an Accretion Disk with Star-Disk Boundary Layer. *ApJ*, **571**, 413.

Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992a. ZEUS-2D : A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, **80**, 753–790.

Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992b. ZEUS-2D : A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. *ApJS*, **80**, 791.

Stone, J. M., Mihalas, D., & Norman, M. L. 1992. ZEUS-2D : A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. III - The radiation hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, **80**, 819–845.

Tóth, G. 1996. A General Code for Modeling MHD Flows on Parallel Computers : Versatile Advection Code. *Astrophysical Letters Communications*, **34**, 245.

Tagger, M., Sygnet, J. F., Athanassoula, E., & Pellat, R. 1987. Nonlinear coupling of galactic spiral modes. *ApJ*, **318**, L43–L46.

Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002. Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, **565**, 1257–1274.

Tassoul, J. 1978. *Theory of rotating stars.* Princeton Series in Astrophysics, Princeton : University Press, 1978.

Terquem, C. 2003. Stopping inward planetary migration by a toroidal magnetic field. *MNRAS*, **341**, 1157.

Teyssier, R. 2002. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES. *A&A*, **385**, 337–364.

Tohline, J.E., & Hachisu, I. 1990. The breakup of self-gravitating rings, tori, and thick accretion disks. *ApJ*, **361**, 394.

Toomre, A. 1964. On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, **139**, 1217.

Toro, E.F. 1997. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.* Springer.

van Leer, B. 1977. Towards the ultimate conservative difference scheme : IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, **23**, 276–299.

Villumsen, J. V. 1985. Evolution of the velocity distribution in galactic disks. *ApJ*, **290**, 75–85.

von Neumann, J., & Richtmyer, R.D. 1950. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. *J.Appl.Phys.*, **21**, 232.

Ward, W. R. 1986. Density waves in the solar nebula - Differential Lindblad torque. *Icarus*, **67**, 164–180.

Ward, W. R. 1997. Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, **126**, 261–281.

Ward-Thompson, D., Motte, F., & Andre, P. 1999. The initial conditions of isolated star formation - III. Millimetre continuum mapping of pre-stellar cores. *MNRAS*, **305**, 143–150.

Weintraub, D. A., Zuckerman, B., & Masson, C. R. 1989. Measurements of Keplerian rotation of the gas in the circumbinary disk around T Tauri. *ApJ*, **344**, 915–924.

Woodward, J. W., Tohline, J. E., & Hachisu, I. 1994. The stability of thick, self-gravitating disks in protostellar systems. *ApJ*, **420**, 247–267.

Yorke, H. W., & Bodenheimer, P. 1999. The Formation of Protostellar Disks. III. The Influence of Gravitationally Induced Angular Momentum Transport on Disk Structure and Appearance. *ApJ*, **525**, 330–342.

Yorke, H. W., Bodenheimer, P., & Laughlin, G. 1993. The formation of protostellar disks. I - 1 M(solar). *ApJ*, **411**, 274–284.

Annexe A

Ionisation des disques protoplanétaires

Je présente dans les pages suivantes l'article *"The ionization fraction in α models of protoplanetary discs"* publié en 2002 dans la revue *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.*

Mon. Not. R. Astron. Soc. **329,** 18–28 (2002)

The ionization fraction in α models of protoplanetary discs

Sébastien Fromang,[1] Caroline Terquem[1,2★] and Steven A. Balbus[3]
[1]*Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France*
[2]*Université Denis Diderot–Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5, France*
[3]*Virginia Institute of Theoretical Astronomy, Department of Astronomy, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903-0818, USA*

Accepted 2001 August 23. Received 2001 August 21; in original form 2001 July 7

ABSTRACT

We calculate the ionization fraction of protostellar α discs, taking into account vertical temperature structure and the possible presence of trace metal atoms. Both thermal and X-ray ionization are considered. Previous investigations of layered discs used radial power-law models with isothermal vertical structure. But α models are used to model accretion, and the present work is a step towards a self-consistent treatment. The extent of the magnetically uncoupled ('dead') zone depends sensitively on α, on the assumed accretion rate and on the critical magnetic Reynolds number, below which magnetohydrodynamic (MHD) turbulence cannot be self-sustained. Its extent is extremely model-dependent. It is also shown that a tiny fraction of the cosmic abundance of metal atoms can dramatically affect the ionization balance. Gravitational instabilities are an unpromising source of transport, except in the early stages of disc formation.

Key words: accretion, accretion discs – MHD – planetary systems: protoplanetary discs – stars: pre-main-sequence.

1 INTRODUCTION

The only process known that is able to initiate and sustain turbulent transport in accretion discs is the magnetorotational instability (MRI; Balbus & Hawley 1991, 1998, and references therein). Because of the presence of finite resistivity, however, protostellar disc applications of the MRI are not straightforward. Numerical magnetohydrodynamic (MHD) disc simulations with ohmic dissipation (Fleming, Stone & Hawley 2000) show that magnetic turbulence cannot be sustained if the magnetic Reynolds number, Re_{M}, is lower than some critical value, $Re_{\mathrm{M,crit}}$. If there is a net magnetic flux through the disc, the simulations indicate that $Re_{\mathrm{M,crit}}$ is about 100, and roughly corresponds to the Reynolds number below which the modes are linearly stable. If there is no net magnetic flux through the disc, $Re_{\mathrm{M,crit}}$ is found to be much larger, of the order of 10^4. In this case, MHD turbulence can be suppressed even if the linear modes are only slightly affected. It is important to bear in mind that the value of $Re_{\mathrm{M,crit}}$ is uncertain. Recent studies of the linear stability of protostellar discs indicate that the effects of Hall electromotive forces are important, and that the actual critical Reynolds number may accordingly be smaller (Wardle 1999; Balbus & Terquem 2001).

On scales of 1 au in a protostellar disc, $Re_{\mathrm{M}} = 100$ corresponds to ionization fraction of about 10^{-12} (e.g., Balbus & Hawley 2000; and Section 4 below). Although very small, this fraction may not be attained in the intermediate regions of protostellar discs. The disc zones in which Re_{M} is lower or larger than the critical Reynolds number are usually referred to as *dead* and *active*, respectively (Gammie 1996). The active layer extends vertically from the disc surface down to some altitude, which depends upon the radial location and the disc model.

The extent of the dead zone has been modelled by several authors using different ionization agents: Gammie (1996, cosmic rays), Igea & Glassgold (1999, X-rays) and Sano et al. (2000, cosmic rays and radioactivity). All these studies were based on the minimum-mass disc model of Hayashi, Nakazawa & Nakagawa (1985), in which temperature and surface mass density vary as simple power laws of the radius, and the vertical structure is isothermal. This is a rather arbitrary choice, and the large-scale structure of a turbulent α disc is in fact very different (Papaloizou & Terquem 1999). There is some theoretical evidence that MHD turbulence leads to a large-scale α-type structure in thin Keplerian discs (Balbus & Papaloizou 1999). It is the goal of this paper to investigate the ionization fraction of an α-type disc, taking into account the vertical structure of such models. We shall consider thermal ionization and X-ray ionization, as these mechanisms are likely to be more important than cosmic rays in X-ray active young stellar objects (Glassgold, Feigelson & Montmerle 2000).

The disc ionization depends on the recombination rate of the electrons, which are removed through dissociative recombination with molecular ions and, at a much slower rate, through radiative recombination with heavy-metal ions. In the previous studies of disc ionization by X-rays, it was assumed that all the metal atoms were locked up in dust grains, most of which had themselves

★E-mail: terquem@iap.fr

sedimented towards the disc mid-plane. However, the ionization fraction is extremely sensitive to even a very small number of metal atoms. This is because these rapidly pick up the charges of molecular ions and recombine only slowly with the electrons. In this paper, we therefore include the effect of a non-zero density of metal atoms on the disc ionization.

The plan of the paper is as follows. In Section 2, we describe the disc models used, and compare them with Hayashi et al. (1985). In Section 3, we discuss the different ionization mechanisms. Thermal ionization is important in the disc inner parts, whereas X-ray ionization dominates everywhere else. We also discuss the effect of the presence of heavy-metal atoms on the ionization fraction. In Section 4 we present results for α-type discs for a range of gas accretion rates $\dot{M}$ and values of the viscosity parameter α. We find that the extent of the dead zone depends very sensitively on the critical Reynolds number, the parameters of the disc model ($\dot{M}$ and α) and the density of heavy-metal atoms. With no metal atoms and $Re_{\mathrm{M,crit}} = 100$, we find in most cases that the dead zone generally extends from a fraction of an astronomical unit out to 10–10^2 au. With an accretion rate of $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$ for instance, the dead zone extends from 0.2 to 100 au. This is much larger than what was found by previous authors, who used a smaller value of $Re_{\mathrm{M,crit}}$. However, we also find that the dead zone disappears completely for $\alpha \geq 10^{-2}$ when there is even a tiny density of heavy-metal atoms. For instance, a density as small as 10^{-7} or 10^{-6} times the cosmic abundance is enough to make a disc with $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$ completely turbulent. The dead zone is dramatically reduced or even disappears when the critical Reynolds number is taken to be 1, even when there are no heavy-metal atoms. In Section 5, we study the evolution of an α disc with a dead zone, with the aim of investigating local gravitational instability. Gammie (1996, 1999) and Armitage, Livio & Pringle (2001) have noted that a layered disc cannot accrete mass steadily, and that accumulation of mass in the dead zone may lead to gravitational instabilities. We find that, when there is no mass falling on to the disc, the accumulation rate is too slow for gravitational instabilities to develop within the disc lifetime. Finally, in Section 6 we summarize and discuss our results.

2 DISC MODELS

We use conventional α disc models, as calculated by Papaloizou & Terquem (1999), to which the reader is referred for details. The disc is assumed to be in Keplerian rotation around a central mass $M_{\star} = 1\,\mathrm{M}_{\odot}$. The opacity, taken from Bell & Lin (1994), has contributions from dust grains, molecules, atoms and ions. The values of α and mass flow rate $\dot{M}$ are taken to be free parameters, and determine the model uniquely. In the steady-state limit, $\dot{M}$ is constant through the disc. At a given radius r, the vertical structure is obtained by solving the equations of hydrostatic equilibrium, energy conservation and radiative transport with appropriate boundary conditions. (At the temperatures of interest here, convective transport is not significant.) The detailed results of these calculations for $\alpha = 10^{-2}$ or 0.1 and $\dot{M}$ in the range 10^{-9}–$10^{-6}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ may be found in Papaloizou & Terquem (1999). In Fig. 1, we plot steady-state values of the mid-plane temperature T_{m} and the surface mass density Σ versus r for α between 10^{-3} and 10^{-1}; for illustrative purposes we have adopted $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$.

All solar nebula ionization studies previous to this have used the Hayashi et al. (1985) model of the solar nebula,

$$\Sigma = 1700\left(\frac{1\,\mathrm{au}}{r}\right)^{1.5}\,\mathrm{g\,cm^{-2}} \quad \text{and} \quad T = 280\left(\frac{1\,\mathrm{au}}{r}\right)^{0.5}\,\mathrm{K},$$

as the equilibrium profile. (Here, r is the cylindrical radius.) This model is based upon a chain of arguments: the current orbits and composition of the planets reflect the distribution and composition of dust in the pre-planetary nebula; the planets have not moved radially in the course of their history; the formation of planets was extremely efficient. While this has been a useful organization of a complex problem, it certainly leaves room for other approaches to modelling the nebula. A question of some interest is how important the nebular model is to the ionization structure, which has motivated the approach presented here. For example, the Hayashi et al. (1985) model leads to a more centrally condensed disc mass than that obtained in a steady α disc. With $\alpha = 10^{-2}$, a very large accretion rate of $\dot{M} \sim 10^{-6}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ is necessary to obtain the

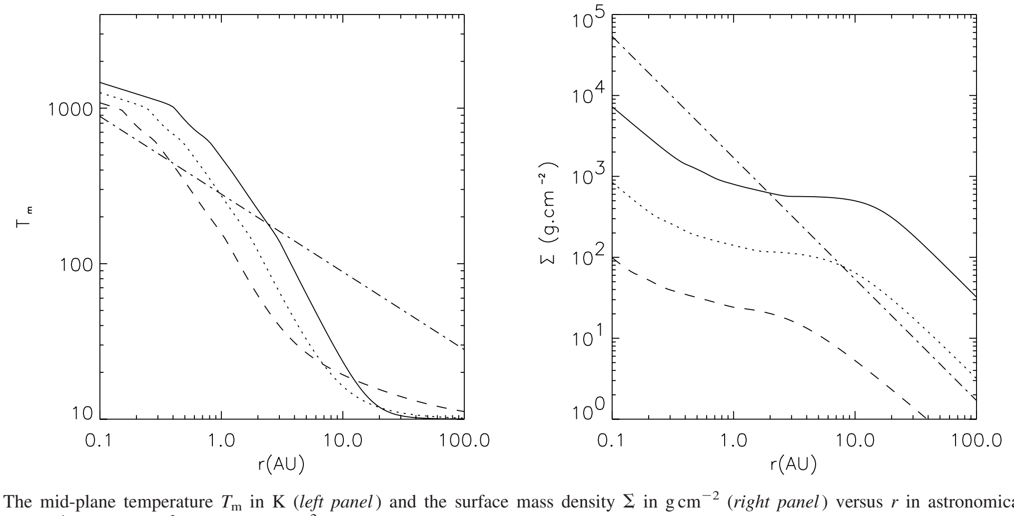

Figure 1. The mid-plane temperature T_{m} in K (*left panel*) and the surface mass density Σ in $\mathrm{g\,cm^{-2}}$ (*right panel*) versus r in astronomical units for $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-3}$ (solid lines), 10^{-2} (dotted lines) and 0.1 (dashed lines). For comparison the model used by Igea & Glassgold (1997) is also displayed (dotted-dashed lines).

above Hayashi value of Σ at 1 au. For comparison, we have plotted temperature and mass density curves of the two models in Fig. 1.

Ionization by X-rays is thus much more efficient around 1 au in an α disc model than in the Hayashi et al. (1985) model. The theoretical justification for a minimum-mass model is not strongly compelling, and it is quite incompatible with standard accretion disc theory. In addition, as mentioned above, there is some theoretical evidence that MHD turbulence leads to a large-scale α-type structure in thin Keplerian discs (Balbus & Papaloizou 1999). This is the primary motivation for the work presented here.

3 IONIZATION AND RECOMBINATION

Protostellar discs are ionized mainly by thermal processes and by non-thermal X-rays. Cosmic rays, a classical ionization source in cool gas, have also been considered as a source of ionization (Gammie 1996; Sano et al. 2000), but the low-energy particles (important for ionization) were almost certainly excluded by winds from the early solar nebula, as they are today in a far less active environment. Radioactive decay of ^{40}K and ^{26}Al has also been investigated by some authors (e.g., Consolmagno & Jokipii 1978), but their ionization effects are quite small compared to the levels of interest here (Stepinski 1992; Gammie 1996).

3.1 Thermal ionization

If not condensed on to grains, the alkali ions Na^+ and K^+ will be the dominant thermal ionization source in protostellar discs (Umebayashi & Nakano 1988). At the onset of dynamically interesting ionization levels ($\sim 10^{-13}$), the K^+ ion is, with its smaller ionization potential, more important. In this regime, the Saha equation may be approximated as (Balbus & Hawley 2000)

$$x_e \equiv \frac{n_e}{n_n} = 6.47 \times 10^{-13} \left(\frac{a}{10^{-7}}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{10^3}\right)^{3/4} \times \left(\frac{2.4 \times 10^{15}}{n_n}\right)^{1/2} \frac{\exp(-25\,188/T)}{1.15 \times 10^{-11}}, \quad (1)$$

where n_e and n_n are respectively the electron and neutral number densities in cm^{-3}, and a is the K abundance relative to hydrogen. Owing to the Boltzmann cut-off factor, thermal ionization is important only in the disc inner regions, on scales less than 1 au, where the mid-plane temperature is likely to exceed 10^3 K. (Above this temperature the alkalis will tend to be in the gas phase, making the approximation self-consistent.) If there is magnetic coupling on scales larger than this, non-thermal ionization sources are required.

3.2 X-ray ionization

Young stellar objects appear to be very active X-ray sources, with X-ray luminosities in the range of 10^{29}–10^{32} erg s^{-1} and photon energies from about 1 to 5 keV (Koyama et al. 1994; Casanova et al. 1995; Carkner et al. 1996). Glassgold, Najita & Igea (1997, hereafter GNI97; see also Igea & Glassgold 1999) pointed out that these X-rays are likely to be the dominant non-thermal ionization source in protostellar discs. These authors modelled the X-ray source as an isothermal ($T = T_X$) bremsstrahlung coronal ring, of radius of about 10 R$_\odot$, located at a similar distance above (and below) the disc mid-plane. The total X-ray luminosity is L_X, with each hemisphere contributing $L_X/2$. The associated ionization rate is given by (Krolik & Kallman 1983; GNI97)

$$\zeta = \frac{(L_X/2)}{4\pi r^2 kT_X} \sigma(kT_X) \frac{kT_X}{\Delta\epsilon} J(\tau). \quad (2)$$

Here, σ is the photoionization cross-section, which is fitted to a power law (Igea & Glassgold 1999)

$$\sigma(E) = 8.5 \times 10^{-23} (E/\mathrm{keV})^{-n}\ \mathrm{cm}^2, \quad (3)$$

with $n = 2.81$ (these values apply to the case where heavy elements are depleted on to grains and get segregated from the gas). $\Delta\epsilon = 37$ eV is the average energy required by a primary photoelectron to make a secondary ionization. The dimensionless integral J is

$$J(\tau) = \int_{x_0}^{\infty} x^{-n} \exp(-x - \tau x^{-n})\, \mathrm{d}x, \quad (4)$$

an energy integral over the X-ray spectrum involving the product of the cross-section (whence the factor x^{-n}) and the attenuated X-ray flux. The factor τ is the optical depth at an energy of kT_X; it depends upon one's location within the disc. Generally the integral is insensitive to the lower limit threshold energy represented by x_0, and for the large τ case of interest here it may be asymptotically expanded. The leading-order result is

$$J(\tau) \simeq A\tau^{-a} \exp(-B\tau^{-b}), \quad (5)$$

where $A = 0.686$, $B = 1.778$, $a = 0.606$ and $b = 0.262$. In computing the optical depth, we make the approximation that the photons travel along straight lines; that is, we will neglect their diffusion both by the ambient medium and by the disc interior. Note however that scattering by the disc atmosphere would increase the ionization, both because some of the photons directed away from the disc would be scattered back, and because scattering provides pathways to the disc interior with smaller optical depths than a simple linear traversal. Note that here we do not make the approximation of GNI97 that the path of the photons inside the disc is vertical.

3.3 Recombination processes

In contrast to ionization, which is reasonably straightforward, electron recombination is greatly complicated by the presence of dust grains in the nebula. Not only are results dependent upon the size spectrum of the grains, imperfectly understood surface physicochemical processes will strongly influence charge capture and emission. Uncertainties attending the role of dust grains represent the greatest obstacle in estimating the solar nebula's ionization structure.

Gammie (1996) and GNI97 finessed this issue by arguing that the dust will settle rapidly towards the mid-plane, and that the dominant recombination process will therefore be molecular dissociative recombination. While this greatly simplifies matters, it is prudent to regard the vertical distribution of the grains in magnetically coupled disc regions as an outstanding problem. Turbulence tends to mix, but the MRI is not particularly efficient at mixing *vertically*. Convective turbulence, should it be present, is a fine vertical mixer, and dust emission in the upper layers enhances the cooling, aiding the convection process itself. But sustaining convection without the MRI is known to be problematic.

Given the uncertainties, we take the view that it makes little sense to strive for high accuracy in a complex model. We have therefore opted for the simplicity of the previous studies, and will restrict our modelling to gas-phase recombination. This may well overestimate the electron density in the regime in which adsorption by grains exceeds X-ray photoemission, but the model is readily understood and serves as a useful benchmark. It is technically valid when the grains lie within a dead (magnetically decoupled) layer near the mid-plane, or if vertical mixing is inefficient. In the latter case, note that the disc is likely to develop a dead sheet at its mid-plane where the dust has concentrated, as in either the Gammie (1996) or GNI97 models.

One important addition that we shall emphasize is the presence of charge exchange between molecular ions and metal atoms (Sano et al. 2000). What is of interest here is the great sensitivity of x_e to the presence of even trace amounts of metal atoms, and the extreme *insensitivity* of the metal atoms to the spatial density of the grains. The latter is a consequence of the dual role played by the dust: it is an adsorber as well as an (X-ray induced) desorber of metal atoms.

If thermal processes prevailed in the disc, the metal atom population would be negligibly small even by these sensitive standards: the temperatures of interest are well below the condensation temperatures of most refractory elements. But just as non-thermal processes may regulate the ionization fraction of the disc, they may also regulate metal atom population. Consider a dust grain in the presence of an X-ray radiation field.[1] The rate at which atoms are liberated from the grain is $\mathcal{F}\sigma_{\rm rad}y$, where $\mathcal{F}$ is the photon number flux, $\sigma_{\rm rad}$ is the radiation cross-section and y is the quantum yield. This is balanced by the metal adsorption rate on to the grain, $n_{\rm M}v_{\rm th}\sigma_{\rm cap}s$, where $n_{\rm M}$ is the metal atom density, $v_{\rm th}$ is the thermal velocity, $\sigma_{\rm cap}$ is the capture cross-section and s is the sticking probability. Thus,

$$x_{\rm M} \equiv \frac{n_{\rm M}}{n_{\rm n}} = \frac{\mathcal{F}}{n_{\rm n}v_{\rm th}}\frac{\sigma_{\rm rad}}{\sigma_{\rm cap}}\frac{y}{s}, \tag{6}$$

independent of the dust density. To understand the consequences of this more clearly, we next examine the dependence of x_e upon $x_{\rm M}$.

The ionization fraction x_e is obtained by balancing the net rates of ionization and recombination. Electrons are captured via dissociative recombination with molecular ions (e.g., HCO^+) and radiative recombination with heavy-metal ions (e.g., Mg^+). As noted, charges are also transferred from molecular ions to metal atoms, and hence the level of ionization depends on the abundance of metal atoms in the gas.

Let $n_{\rm m}$, $n_{\rm m^+}$ and $n_{\rm M^+}$, respectively, denote the density of molecules, molecular ions and metal ions. The rate equations for $n_{\rm e}$ and $n_{\rm m^+}$ are

$$\frac{{\rm d}n_{\rm e}}{{\rm d}t} = \zeta n_{\rm n} - \beta n_{\rm e}n_{\rm m^+} - \beta_{\rm r}n_{\rm e}n_{\rm M^+}, \tag{7}$$

$$\frac{{\rm d}n_{\rm m^+}}{{\rm d}t} = \zeta n_{\rm n} - \beta n_{\rm e}n_{\rm m^+} - \beta_{\rm t}n_{\rm M}n_{\rm m^+}, \tag{8}$$

where β is the dissociative recombination rate coefficient for molecular ions, $\beta_{\rm r}$ the radiative recombination rate coefficient for metal atoms, and $\beta_{\rm t}$ the rate coefficient of charge transfer from molecular ions to metal atoms. We have made the standard simplifying assumption that the rate coefficients are the same for all the species. For the numerical work, we take (Oppenheimer & Dalgarno 1974; Spitzer 1978; for $\beta_{\rm t}$ see Millar, Farquhar & Willacy 1997):

$$\beta_{\rm r} = 3\times10^{-11}T^{-1/2}\,{\rm cm^3\,s^{-1}},$$
$$\beta = 3\times10^{-6}T^{-1/2}\,{\rm cm^3\,s^{-1}}, \tag{9}$$
$$\beta_{\rm t} = 3\times10^{-9}\,{\rm cm^3\,s^{-1}}.$$

Finally, charge neutrality implies

$$n_{\rm e} = n_{\rm M^+} + n_{\rm m^+}. \tag{10}$$

In steady-state equilibrium, equations (7), (8) and (10) lead to (Oppenheimer & Dalgarno 1974)

$$x_{\rm e}^3 + \frac{\beta_{\rm t}}{\beta}x_{\rm M}x_{\rm e}^2 - \frac{\zeta}{\beta n_{\rm n}}x_{\rm e} - \frac{\zeta\beta_{\rm t}}{\beta\beta_{\rm r}n_{\rm n}}x_{\rm M} = 0, \tag{11}$$

where $x_{\rm M} \equiv n_{\rm M}/n_{\rm n}$. The extreme sensitivity of this equation to $x_{\rm M}$ is apparent upon substituting from equation (9) for $\beta_{\rm t}/\beta$ and $\beta_{\rm t}/\beta_{\rm r}$:

$$x_{\rm e}^3 + 10^{-3}T^{1/2}x_{\rm M}x_{\rm e}^2 - \frac{\zeta}{\beta n_{\rm n}}x_{\rm e} - 10^2T^{1/2}\frac{\zeta}{\beta n_{\rm n}}x_{\rm M} = 0. \tag{12}$$

In the absence of metals ($x_{\rm M} = 0$), equation (11) has the simple solution used by Gammie (1996) and GNI97,

$$x_{\rm e} = \sqrt{\frac{\zeta}{\beta n_{\rm n}}}, \tag{13}$$

a balance between the first and third terms on the left-hand side of the equation. This case would correspond, for example, to all metals locked in sedimented grains. The opposite limit, metal domination, is equally simple,

$$x_{\rm e} = \sqrt{\frac{\zeta}{\beta_{\rm r} n_{\rm n}}}, \tag{14}$$

and corresponds to a balance between the second and fourth terms of the cubic. The transition from one limit to the other begins when the last two terms of the left-hand side of the equation are comparable, that is when

$$x_{\rm M} \sim 10^{-2}T^{-1/2}x_{\rm e}, \tag{15}$$

from which one immediately sees the extreme sensitivity to the metal atom abundance. A value of $x_{\rm M} \sim 10^{-14}$, or about 10^{-7} of its cosmic abundance, might well affect the ionization balance. This, combined with insensitivity of low values of $x_{\rm M}$ to the dust abundance, leads us to consider the effect of finite $x_{\rm M}$ on the ionization balance in the disc.

4 IONIZATION FRACTION IN α DISC MODELS

For a given disc model with fixed $\dot{M}$ and α, we calculate the ionization fraction $x_{\rm e}$ as a function of r and z using equations (1) and (11), i.e. taking into account both thermal and X-ray ionization. In equation (11), the fraction of heavy-metal atoms, $x_{\rm M}$, is varied between zero and some finite value, in order to determine the minimum value of $x_{\rm M}$ for which a particular disc model is sufficiently ionized to be magnetically coupled. In Section 6, we show that the values of $x_{\rm M}$ we have used are at least roughly consistent with equation (6).

The ohmic resistivity η is (e.g., Blaes & Balbus 1994)

$$\eta = \frac{234}{x_{\rm e}}T^{1/2}\,{\rm cm\,s^{-2}}, \tag{16}$$

[1] Cosmic rays, whose ionization effects are secondary to X-rays, may in fact be more effective at releasing metal atoms from grains. Their presence, while increasing the rate of sputtering, would not affect the qualitative point being made.

and we define the magnetic Reynolds number as

$$Re_{\rm M} = \frac{c_{\rm s} H}{\eta}, \tag{17}$$

where H is the disc semithickness and $c_{\rm s}$ is the sound speed. Numerical simulations including ohmic dissipation (Fleming et al. 2000) indicate that MHD turbulence cannot be sustained if $Re_{\rm M}$ falls below a critical value, $Re_{\rm M,crit}$, which depends upon the field geometry. If there is a mean vertical field present, $Re_{\rm M,crit}$ is about 100. However, recent studies of the linear stability of protostellar discs including the effects of Hall electromotive forces suggest that $Re_{\rm M,crit}$ may be smaller (Wardle 1999; Balbus & Terquem 2001), and preliminary results from non-linear Hall simulations appear to back this finding (Sano & Stone, private communication). In anticipation of this, it is prudent to consider both $Re_{\rm M,crit} = 100$ and $Re_{\rm M,crit} = 1$.

In Figs 2–7, we plot the total column density, and that of the active layer, for different disc models: $\alpha = 0.1$ (Figs 2 and 3), 10^{-2} (Figs 4 and 5) and 10^{-3} (Figs 6 and 7): $\dot{M}$ varies between 10^{-9} and $10^{-6}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$. Cases with $\alpha = 10^{-2}$ and $\dot{M} = 10^{-6}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-3}$ and $\dot{M} \geq 10^{-7}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$ have not been considered, as they give disc masses larger than that of the central star. Note that $x_{\rm M} = 0$ in Figs 2, 4 and 6, whereas $x_{\rm M}$ is finite in Figs 3, 5 and 7. In all figures, the X-ray luminosity and temperature are $L_{\rm X} = 10^{30}\,{\rm erg\,s}^{-1}$ and $kT_{\rm X} = 3\,{\rm keV}$ respectively. When the entire disc is found to be active, a single curve is shown; otherwise, the difference between the two curves indicates the column density of the dead layer.

In Table 1, we summarize the dead zone properties for the different models considered. The quantity $x_{\rm M,min}$ is the value of $x_{\rm M}$ above which the dead zone disappears, and $r_{\rm max}$ is the radius at which the vertical column density of the dead zone is largest. The final column is the percentage of the vertical column density occupied by the dead zone at $r = r_{\rm max}$. Note that if $Re_{\rm M,crit} = 1$, $\alpha = 0.1$ discs are all active throughout their entire extent, as are $\alpha = 10^{-2}$ discs with $\dot{M} \leq 10^{-8}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$. If one raises $Re_{\rm M,crit}$ to 100, $\alpha = 0.1$ discs are still magnetically active everywhere, when $\dot{M} \leq 10^{-8}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$. As α increases, the disc surface density decreases at fixed $\dot{M}$, and the active zone increases in vertical extent.

Figs 3, 5 and 7 show that, as $x_{\rm M}$ increases, the dead zone shrinks both radially (with its outer edge moving inwards) and vertically. Its inner edge does not move outwards, because it is located at the radius at which the temperature drops below the level needed for thermal ionization to be effective, which is independent of $x_{\rm M}$. For a given α, this radius increases with $\dot{M}$, as the disc becomes hotter. Similarly, this radius increases when α decreases for $\dot{M}$ fixed.

The existence of a local minimum in the column density of the active layer at $r = r_{\rm max}$ is easily understood. The α disc models have an almost uniform surface mass density over a broad radial range that depends on $\dot{M}$ and α (see Fig. 1). As we move away from the star remaining in this region, the X-ray flux decreases because of simple geometrical dilution. Since the column density along the path of the photons stays about the same, the active layer becomes thinner. It starts to thicken only when the surface mass density in the disc begins to drop.

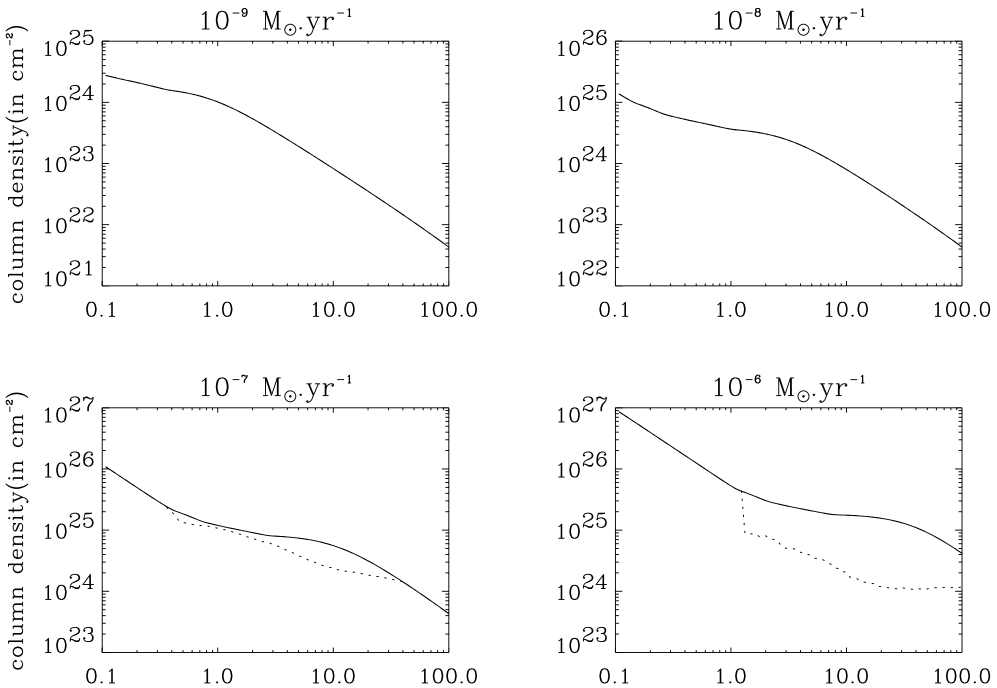

Figure 2. Column density, in $\rm cm^{-2}$, of the whole disc (solid lines) and of the active zone for $Re_{\rm M,crit} = 100$ (dotted lines). Here $x_{\rm M} = 0$, $\alpha = 0.1$ and $\dot{M} = 10^{-9}$ (*upper left panel*), 10^{-8} (*upper right panel*), 10^{-7} (*lower left panel*) and $10^{-6}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$ (*lower right panel*). When the curve representing the active zone coincides with that representing the whole disc, then the whole disc is active. This is the case for $\dot{M} = 10^{-9}$ and $10^{-8}\,{\rm M}_\odot\,{\rm yr}^{-1}$ when $Re_{\rm M,crit} = 100$, and for all the values of $\dot{M}$ when $Re_{\rm M,crit} = 1$.

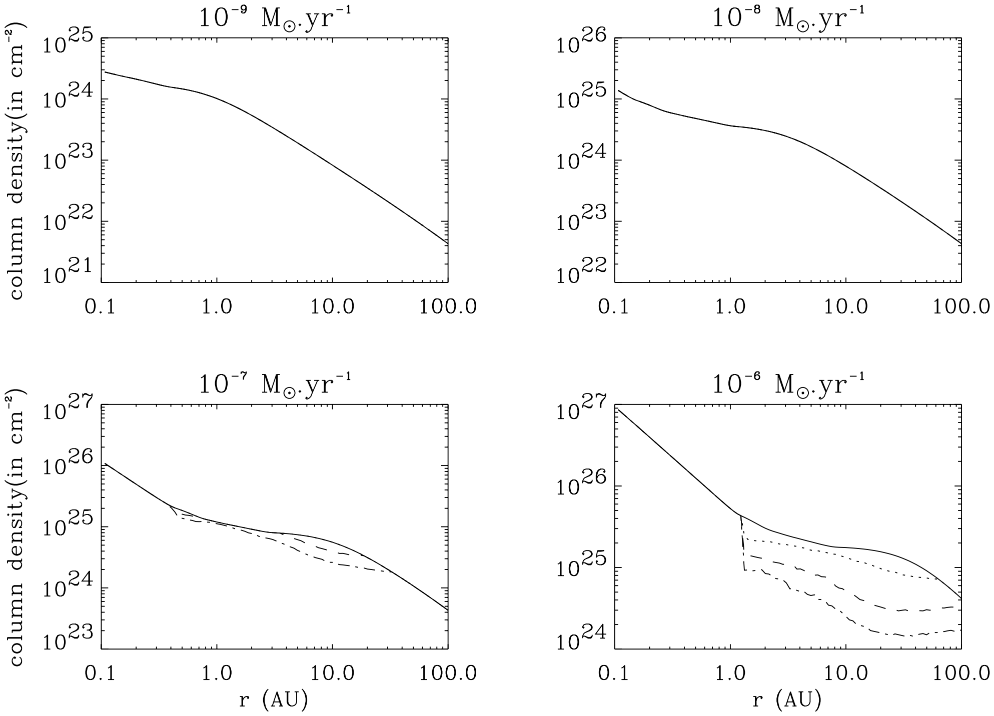

Figure 3. Same as Fig. 2 but for $x_{\rm M} \neq 0$. On each panel, the column density of the active zone is represented for $x_{\rm M} = 10^{-16}$ (dotted-dashed lines), 10^{-15} (dashed lines) and 10^{-14} (dotted lines). For $\dot{M} = 10^{-9}$ and $10^{-8}\,{\rm M_{\odot}\,yr^{-1}}$, the whole disc is active for all these values of $x_{\rm M}$. For $\dot{M} = 10^{-7}\,{\rm M_{\odot}\,yr^{-1}}$, the whole disc is active for $x_{\rm M} > 10^{-15}$.

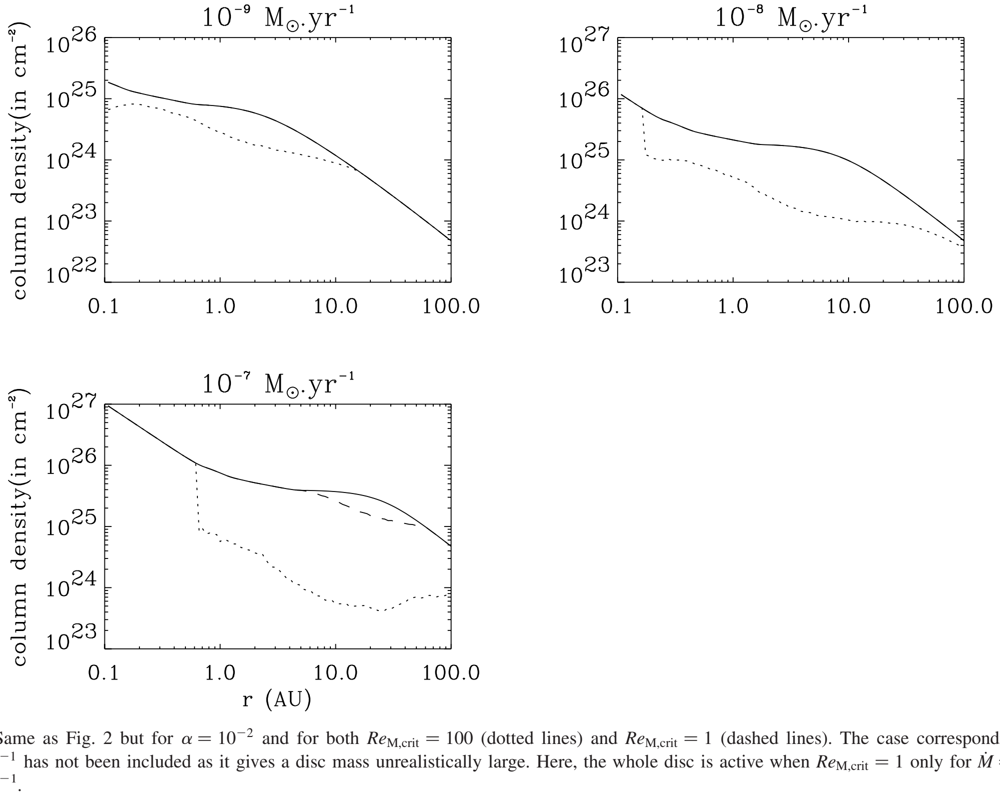

Figure 4. Same as Fig. 2 but for $\alpha = 10^{-2}$ and for both $Re_{\rm M,crit} = 100$ (dotted lines) and $Re_{\rm M,crit} = 1$ (dashed lines). The case corresponding to $\dot{M} = 10^{-6}\,{\rm M_{\odot}\,yr^{-1}}$ has not been included as it gives a disc mass unrealistically large. Here, the whole disc is active when $Re_{\rm M,crit} = 1$ only for $\dot{M} = 10^{-9}$ and $10^{-8}\,{\rm M_{\odot}\,yr^{-1}}$.

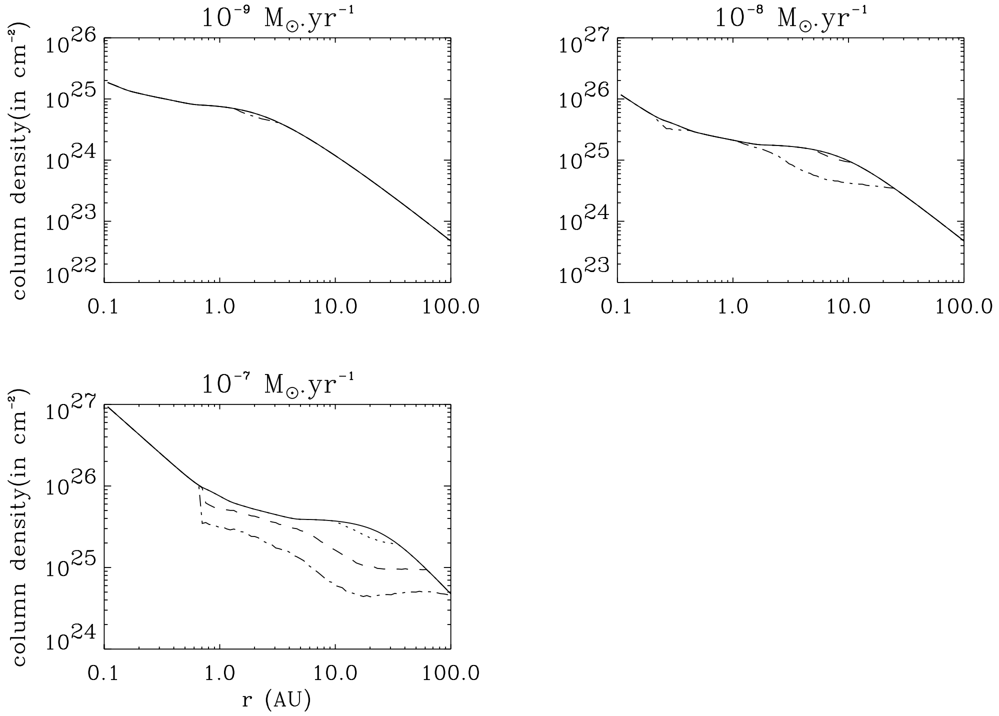

Figure 5. Same as Fig. 3 ($Re_{\rm M,crit} = 100$) but for $\alpha = 10^{-2}$ and for different values of $x_{\rm M}$. On each panel, the column density of the active zone is represented for $x_{\rm M} = 10^{-13}$ (dotted-dashed lines), 10^{-12} (dashed lines) and 10^{-11} (dotted lines). The case corresponding to $\dot{M} = 10^{-6}\,{\rm M_\odot\,yr^{-1}}$ has not been included as it gives a disc mass unrealistically large. For $\dot{M} = 10^{-9}$, 10^{-8} and $10^{-7}\,{\rm M_\odot\,yr^{-1}}$, the whole disc is active for $x_{\rm M} > 10^{-13}$, $x_{\rm M} > 10^{-12}$ and $x_{\rm M} > 10^{-11}$, respectively.

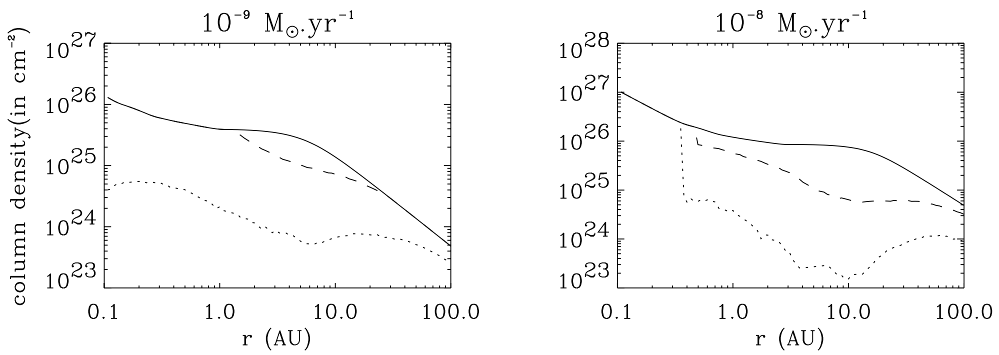

Figure 6. Same as Fig. 4 but for $\alpha = 10^{-3}$. Cases with $\dot{M} = 10^{-7}$ and $10^{-6}\,{\rm M_\odot\,yr^{-1}}$ have not been included as they give a disc mass unrealistically large.

Table 1 gives the value of $x_{\rm M}$ above which the disc is completely active. This should be compared with the cosmic abundance of the metal atoms present in a disc, which is 2×10^{-6} for Na and 3×10^{-5} for Mg (Anders & Grevesse 1989; Boss 1996). When $Re_{\rm M,crit} = 100$ and for a disc model with $\alpha = 10^{-2}$ and $\dot{M} = 10^{-8}\,{\rm M_\odot\,yr^{-1}}$, we see that an abundance of only 10^{-6} or even 10^{-7} of the cosmic value (depending on the species) is needed for the disc to be active.

When $\alpha \leq 10^{-3}$, the disc is never fully active, even for large values of $x_{\rm M}$. This is because the disc is now very massive (about 0.3 solar mass within 100 au for $\dot{M} = 10^{-8}\,{\rm M_\odot\,yr^{-1}}$), and there is a zone in the disc where X-rays simply cannot penetrate. Increasing $x_{\rm M}$ clearly cannot prevent this!

5 EVOLUTION OF A DISC WITH A DEAD ZONE

The fate of the magnetically coupled upper disc layers is far from clear. This relatively low-density region may emerge in the form of a disc wind; it is also possible that the layers will accrete. This is the assumption of Gammie (1996), but it awaits verification by MHD simulations of stratified, partially ionized discs.

Should it occur, layered accretion in a disc will not be steady (Gammie 1996). The regions of the disc where there is an inactive layer act like a bottleneck through which the accretion is slowed and where matter therefore accumulates. Here we investigate whether enough mass can accumulate to make the disc locally

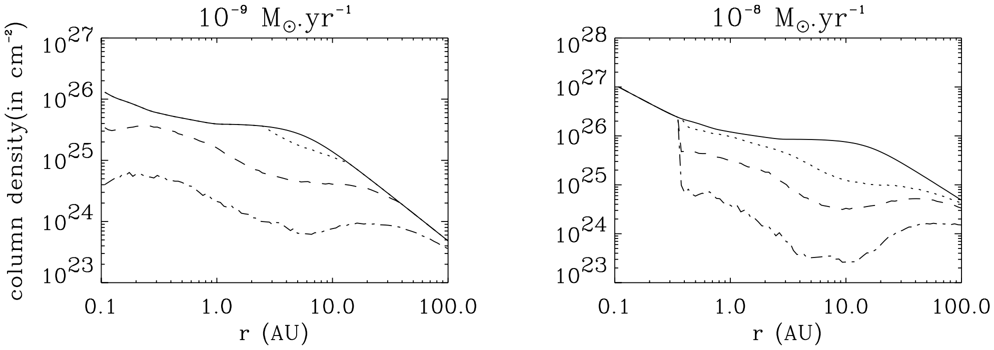

Figure 7. Same as Fig. 3 ($Re_{\mathrm{M,crit}} = 100$) but for $\alpha = 10^{-3}$ and for different values of x_{M}. On each panel, the column density of the active zone is represented for $x_{\mathrm{M}} = 10^{-15}$ (dotted-dashed lines), 10^{-12} (dashed lines) and 10^{-9} (dotted lines). Cases with $\dot{M} = 10^{-7}$ and $10^{-6}\,\mathrm{M_\odot\,yr^{-1}}$ have not been included as they give a disc mass unrealistically large. Here the dead zone never disappears even for large values of x_{M}, and its extent does not vary with x_{M} once $x_{\mathrm{M}} \geq 10^{-9}$.

Table 1. Characteristics of the dead zone. Column 1 contains $Re_{\mathrm{M,crit}}$. In columns 2 and 3 are listed the parameters that characterize the disc, i.e. α and $\dot{M}$ in $\mathrm{M_\odot\,yr^{-1}}$. Column 4 contains $x_{\mathrm{M,min}}$, which is the value of x_{M} above which there is no dead zone. The following columns contain the parameters that describe the dead zone for $x_{\mathrm{M}} = 0$: its inner radius (which is actually insensitive to x_{M}), its outer radius, the radius r_{max} at which its vertical column density is maximum, and the percentage of the vertical column density it occupies at this radius. For $Re_{\mathrm{M,crit}} = 1$, discs with $\alpha = 0.1$ are completely active for all the values of $\dot{M}$, as are discs with $\alpha = 10^{-2}$ and $\dot{M} \leq 10^{-8}\,\mathrm{M_\odot\,yr^{-1}}$. For $Re_{\mathrm{M,crit}} = 100$, discs with $\alpha = 0.1$ and $\dot{M} \leq 10^{-8}\,\mathrm{M_\odot\,yr^{-1}}$ are also completely active. For $Re_{\mathrm{M,crit}} = 100$ and $\alpha = 10^{-3}$, there is a dead zone for all the values of x_{M}.

$Re_{\mathrm{M,crit}}$	α	$\dot{M}$ ($\mathrm{M_\odot\,yr^{-1}}$)	$x_{\mathrm{M,min}}$	Inner radius (au)	Outer radius (au)	r_{max} (au)	Column density (%)
1	10^{-2}	10^{-7}	10^{-17}	5	60	20	50
–	10^{-3}	10^{-9}	10^{-16}	2	30	5	65
–	–	10^{-8}	10^{-13}	0.5	≃100	10	90
100	0.1	10^{-7}	10^{-14}	0.4	30	10	55
–	–	10^{-6}	10^{-13}	1	>100	20	95
–	10^{-2}	10^{-9}	10^{-13}	<0.1	20	2	70
–	–	10^{-8}	10^{-12}	0.2	≃100	6	90
–	–	10^{-7}	10^{-10}	0.7	>100	20	98
–	10^{-3}	10^{-9}		<0.1	>100	5	98
–	–	10^{-8}		0.4	>100	10	99.9

gravitationally unstable. Of course, our calculation is in some sense not self-consistent, since it is based upon the assumption that the disc structure is a constant α model, which we then show cannot be maintained! However, our interest is limited to estimating the extent to which upper layer accretion can build up the column density of the inner disc to the point of gravitational collapse. For this purpose, the precise vertical structure is likely to be a correction of detail, not a fundamental change.

Armitage et al. (2001) have considered a disc embedded in a collapsing envelope, so that mass is continuously added to the disc at a rate larger than the accretion through the disc itself. This strongly favours the development of gravitational instabilities. Here, we are concerned with the later stages of disc evolution, when there is no longer any infall. The inner regions are then supplied only by material coming from further out in the disc plane.

In a fully turbulent disc, the surface mass density evolves with time according to the following equation (Balbus & Papaloizou 1999):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{(r^2\Omega)'}\frac{\partial}{\partial r}(\Sigma r^2 \langle W\rangle), \tag{18}$$

where W is the horizontal stress tensor per unit mass averaged over the azimuthal angle, $\langle W\rangle = \int \rho W\,\mathrm{d}z/\Sigma$ is the density average of W over the disc thickness and the prime denotes the derivative with respect to radius. For an α disc model, W is given by (Shakura & Sunyaev 1973)

$$W = \tfrac{3}{2}\alpha c_{\mathrm{s}}^2, \tag{19}$$

where c_{s} is the sound speed.[2] There is no source term in equation (18) as there is no infall on to the disc.

In a layered disc, the right-hand side of equation (18) also gives the variation per unit time of the surface mass density of the active zone, Σ_{a}, provided we replace Σ by Σ_{a} and $\langle W\rangle$ by $\langle W\rangle_{\mathrm{a}}$. (The notation $\langle X\rangle_{\mathrm{a}} = \int_{\mathrm{a}} \rho X\,\mathrm{d}z/\Sigma_{\mathrm{a}}$; the integration is over the active zone.) However, on the left-hand side, Σ must be replaced by Σ_{d}, the surface density of the dead zone. This is because, at a given location in the disc, Σ_{a} is fixed, and determined by the X-ray source. Therefore, the mass that is added or removed at some radius is actually added to or removed from the *dead* zone. The evolution of the disc, in the parts where there is a dead zone, is then

[2] The factor of 3/2 comes from the standard definition of α, which involves a term $\mathrm{d}\ln\Omega/\mathrm{d}\ln r$.

formally described by the two equations:

$$\frac{\partial \Sigma_{\rm a}}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Sigma_{\rm d}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{(r^2\Omega)'}\frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{\rm a} r^2 \langle W \rangle_{\rm a}). \tag{21}$$

Note that if $\Sigma_{\rm d}$ given by equation (21) becomes negative at some location, then it means that the dead zone disappears, and equation (18) should be used instead to evolve Σ, which is indistinguishable from $\Sigma_{\rm a}$. Since $\langle W \rangle_{\rm a}$ does not vary with time in our models, $\Sigma_{\rm d}$ given by equation (21) varies linearly with time.

We consider as initial conditions a particular disc model characterized by the parameter α and a uniform $\dot{M}$. For illustrative purposes, we chose $\dot{M} = 10^{-8}\,{\rm M}_{\odot}\,{\rm yr}^{-1}$ and $\alpha = 3\times10^{-2}$ and 10^{-2}. The total surface mass density of such a disc is shown in Fig. 8, where we also display the Toomre parameter, $Q(r) = \Omega c_{\rm s}/[\pi G \Sigma(r)]$, where G is the gravitational constant. To get a lower limit for Q, we evaluate $c_{\rm s}$ at the disc surface. Because mass is going to accumulate at some intermediate radii in the disc, Q is going to decrease there. We now investigate whether it can decrease enough for gravitational instabilities to develop, i.e. for Q to drop to values ~ 1. Note that for $\dot{M} = 10^{-7}\,{\rm M}_{\odot}\,{\rm yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$, the initial disc model is already gravitationally unstable beyond about 30 au (the total mass enclosed in this radius being about $0.03\,{\rm M}_{\odot}$), which is why we consider here a smaller value of $\dot{M}$.

We compute the extent of the disc dead zone for $Re_{\rm M,crit} = 100$ and $x_{\rm M} = 0$ (see Section 4). To discuss the evolution of the disc, we need to consider the accretion rate through the disc, which is obtained from (Lynden-Bell & Pringle 1974):

$$\dot{M} = \frac{2\pi}{(r^2\Omega)'}\frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_{\rm a} r^2 \langle W \rangle_{\rm a}). \tag{22}$$

(The 'a' subscripts should be dropped in the absence of a dead zone.) Here, $\dot{M}$ does not change with time. In Fig. 8 we plot $\dot{M}$ versus r at the radii where there is a dead zone. We see that $\dot{M}$ has a minimum at some location r_0. For $r < r_0$, $\dot{M}$ decreases with radius in the active region of the disc. The mass initially within r_0 in the dead zone will thus gradually be accreted on to the star, and whatever mass arrives at r_0 will subsequently be accreted as well. On the other hand, $\dot{M}$ increases with radius beyond r_0 in the active layer. Thus, in this region mass accumulates in the dead zone according to

$$\Sigma \equiv \Sigma_{\rm a} + \Sigma_{\rm d} = \frac{1}{2\pi r}\frac{{\rm d}\dot{M}}{{\rm d}r}t + \Sigma_{\rm i}, \tag{23}$$

where $\Sigma_{\rm i}$ is the initial value of Σ at r, and equations (21) and (22) have been used. The evolution of the Q parameter is then obtained simply from

$$Q\Sigma = \text{ constant}, \tag{24}$$

where the constant is simply the initial value of the product. For the models whose initial conditions are shown in Fig. 8, Q reaches values around unity first at a radius of a few astronomical units after a time of 2×10^7 yr. This is longer by about an order of magnitude than the disc lifetime inferred from observations (Haisch, Lada & Lada 2001). Note that this time-scale is set by the

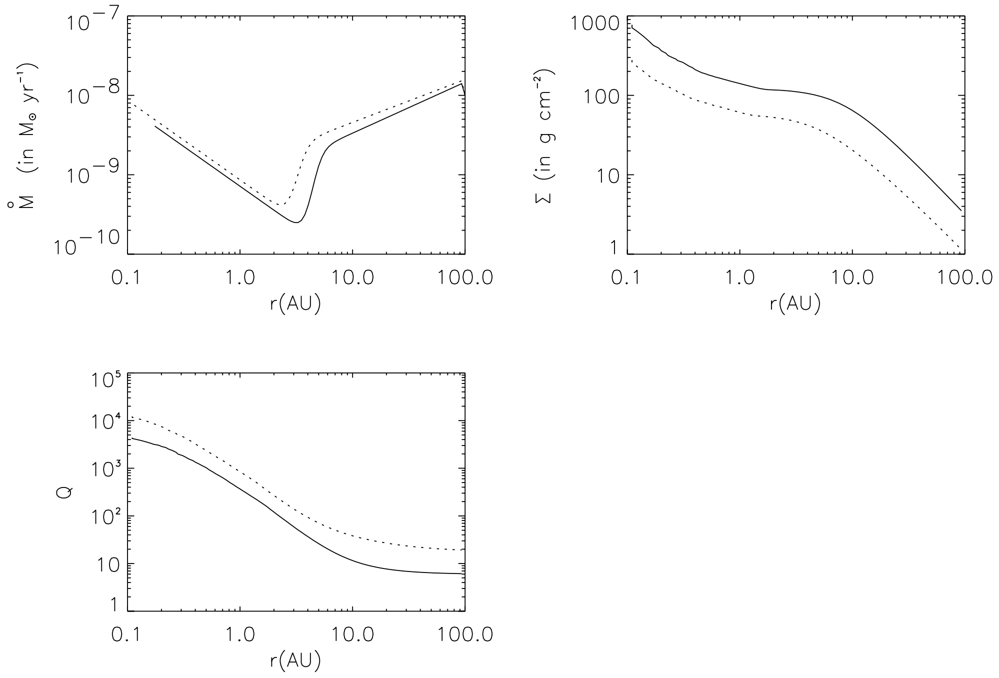

Figure 8. Initial conditions for the disc evolution. We consider a disc with $\dot{M} = 10^{-8}\,{\rm M}_{\odot}\,{\rm yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$ (solid lines) and 3×10^{-2} (dotted lines). Shown are the accretion rate $\dot{M}$ through the active layer of the disc in ${\rm M}_{\odot}\,{\rm yr}^{-1}$ (*upper left panel*), the total surface mass density Σ in g cm^{-2} (*upper right panel*) and the Toomre Q parameter (*lower left panel*) versus r in astronomical units. Because $\dot{M}$ increases with r beyond some radius, mass is going to accumulate in the dead zone at some intermediate radii during the disc evolution, and Q is going to decrease there. However, it does not reach the limit for gravitational instabilities within the disc lifetime.

largest value of Σ reached at the end of the evolution and is thus insensitive to the starting conditions. A simple combination of layered accretion and gravitational instability does not appear to be sufficient to truncate our fiducial disc's lifetime rapidly enough.

6 DISCUSSION AND CONCLUSION

We have calculated a model for the ionization fraction of an α-type disc, taking into account the full vertical structure of the disc. In common with other investigations (Gammie 1996; Glassgold et al. 1997), we have not included grain physics in our ionization model, which is an important limitation. Both the extent and the thickness of the dead zone depend sensitively on the parameters of the disc model, the gas accretion rate $\dot{M}$ and α. For a critical Reynolds number of 100 and parameters believed to be typical of protostellar discs, the dead zone is found to extend from a fraction of an astronomical unit to 10–100 au. For $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$ for instance, the dead zone extends from 0.2 to 100 au. For comparison, Igea & Glassgold (1999), who used a smaller value of $Re_{\mathrm{M,crit}}$, calculated that the dead zone extended to about 5 au. (Also, since in their model the mass is more centrally condensed than in ours, the dead zone at 1 au occupies a larger fraction of the disc vertical column density.) For $\alpha = 0.1$ and $\dot{M} < 10^{-7}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$, the disc can be magnetically coupled over its full extent. This is because the surface mass density is low in this case. Models with $\alpha = 10^{-3}$ have a very large and thick dead zone. When $Re_{\mathrm{M,crit}} = 1$, we have found that the dead zone is dramatically reduced or even disappears. Clearly, uncertainty in the input parameters profoundly influences the extent of magnetic coupling in protostellar discs, and full coupling to the field in some stages of disc evolution currently remains a possibility.

We have found that the characteristics of the dead zone are ultra-sensitive to the presence of heavy-metal atoms in the disc. This is because the metal atoms are rapidly charged by molecular ions and recombine comparatively slowly. Molecular dissociative recombination is otherwise very rapid. For $\alpha = 10^{-2}$ and $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ for instance, an abundance of only 10^{-6}–10^{-7} of the cosmic value is all that is needed in our model for the disc to be completely active, even when $Re_{\mathrm{M,crit}} = 100$.

The density of metal atoms depends on the rate at which they are captured by grains and the rate at which they are liberated when an X-ray hits a grain. (Cosmic rays, which have been ignored here, may be important for this process.) The resulting density is very insensitive to the amount of dust present. If we assume that $\sigma_{\mathrm{rad}} \sim \sigma_{\mathrm{cap}}$ in equation (6), then

$$n_{\mathrm{M}} = \epsilon L_{\mathrm{X}}/(4\pi r^2 v_{\mathrm{th}} k T_{\mathrm{X}})$$

at the distance r from the star, where ϵ is an efficiency factor [equal to the ratio of the quantum yield to the sticking probability, which was introduced in equation (6)]. With L_{X} and kT_{X} in the range 10^{29}–$10^{31}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$ and 1–5 keV, respectively, $v_{\mathrm{th}} \sim 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ and $\epsilon \sim 10^{-6}$ (Bringa 2001, private communication), we get a maximum value for n_{M} that is about $200\,\mathrm{cm^{-3}}$ at $r = 1$ au. For our fiducial values $\dot{M} = 10^{-8}\,\mathrm{M}_{\odot}\,\mathrm{yr}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$, the number density near the disc mid-plane at 1 au is about $n = 6 \times 10^{13}\,\mathrm{cm^{-3}}$. The maximum value of the relative density of metal atoms is therefore $\sim 10^{-12}$, some 10^{-7}–10^{-6} of the cosmic abundance. This crude estimate shows that the density of metal atoms needed for magnetic coupling is within the range reached, independent of the number of grains present. The presence of grains would certainly affect the ionization fraction. This is difficult to evaluate in a protostellar environment dominated by X-rays, and we have not attempted the calculation in this work. However, it is important to note that the value of n_{M} does not depend on the density of grains. It remains unchanged even in a disc where *almost* all the grains have sedimented towards the mid-plane. This is likely to be the situation in the later stages of disc evolution, as the sedimentation time-scale for micrometre-sized (or larger) grains is short (Nakagawa, Nakazawa & Hayashi 1981). Grain sedimentation and growth cause characteristic changes to the radiative spectral energy distribution. Such changes are in fact observed, though other interpretations cannot at present be ruled out (e.g., Beckwith, Henning & Nakagawa 2000).

Sano et al. (2000) investigated a finite density of metal atoms in a calculation of disc ionization (in their model produced by cosmic rays and radioactivity), together with the electron–grain and ion–grain reactions. However, they assumed that the fraction of metal atoms in the gas phase was rather high, equal to 2×10^{-2}. In their model, the relative abundance of metal atoms is therefore around 10^{-6} (they used a cosmic abundance of about 8×10^{-5} for the refractory heavy elements), several orders of magnitude higher than what we consider here. Their conclusion that the disc is almost completely turbulent when grains are sufficiently depleted depends very much upon this assumption.

Finally, we have estimated the evolutionary time-scale against gravitational collapse of an α disc with a dead zone. In our fiducial model, we find that $\sim 10^{-3}\,\mathrm{M}_{\odot}$ accumulates between 2 and 20 au, in regions of low optical depth at millimetre wavelengths. This would be easily detectable. The disc persists beyond 10^{7} yr, an order of magnitude in excess of observational constraints. These results are rather robust. The difficulty suggests that a more elaborate model of the dead zone is required, or that discs are more ionized than our model indicates, or more broadly that simple layered accretion models may not be capturing the essential dynamics of disc accretion. A deeper understanding of disc ionization physics clearly is essential for further progress in this domain of star formation theory.

ACKNOWLEDGMENTS

CT and SAB are grateful to the Virginia Institute of Theoretical Astronomy and the Institut d'Astrophysique de Paris, respectively, for their hospitality and visitor support. CT acknowledges partial support from the Action Spécifique de Physique Stellaire and the Programme National de Planétologie. SAB is supported by NASA grants NAG5-9266, NAG5-7500 and NAG5-106555, and by NSF grant AST 00-70979.

REFERENCES

Anders E., Grevesse N., 1989, Geochim. Cosmochim. Acta, 53, 197
Armitage P. J., Livio M., Pringle J. E., 2001, MNRAS, 324, 705
Balbus S. A., Hawley J. F., 1991, ApJ, 376, 214
Balbus S. A., Hawley J. F., 1998, Rev. Mod. Phys., 70, 1
Balbus S. A., Hawley J. F., 2000, in Benz W., Kallenbach R., Lugmair G. W., eds, ISSI Space Sci. Ser. 9, From Dust to Terrestrial Planets. Kluwer, Dordrecht, p. 39
Balbus S. A., Papaloizou J. C. B., 1999, ApJ, 521, 650
Balbus S. A., Terquem C., 2001, ApJ, 552, 235
Beckwith S. V. W., Henning T., Nakagawa Y., 2001, in Mannings V., Boss A. P., Russel S. S., eds, Protostars and Planets IV. Univ. Arizona Press, Tucson, p. 533
Bell K. R., Lin D. N. C., 1994, ApJ, 427, 987
Blaes O. M., Balbus S. A., 1994, ApJ, 421, 163

Boss A. P., 1996, ApJ, 469, 906
Carkner L., Feigelson E. D., Koyama K., Montmerle T., Reid I. N., 1996, ApJ, 464, 286
Casanova S., Montmerle T., Feigelson E. D., André P., 1995, ApJ, 439, 752
Consolmagno G. J., Jokipii J. R., 1978, Moon Planets, 19, 253
Fleming T. P., Stone J. M., Hawley J. F., 2000, ApJ, 530, 464
Gammie C. F., 1996, ApJ, 457, 355
Gammie C. F., 1999, in Sellwood J. A., Goodman J., eds, ASP Conf. Ser. Vol. 160, Astrophysical Discs. Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 122
Glassgold A. E., Najita J., Igea J., 1997, ApJ, 480, 344 (GNI97)
Glassgold A. E., Feigelson E. D., Montmerle T., 2000, in Mannings V., Boss A. P., Russel S. S., eds, Protostars and Planets IV. Univ. Arizona Press, Tucson, p. 429
Haisch K. E., Jr, Lada E. A., Lada C. J., 2001, ApJ, 553, L153
Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y., 1985, in Black D. C., Mathews M. S., eds, Protostars and Planets II. Univ. Arizona Press, Tucson, p. 1100
Igea J., Glassgold A. E., 1999, ApJ, 518, 848
Koyama K., Maeda M., Ozaki M., Ueno S., Kamata Y., Tawara Y., Skinner S., Yamauchi S., 1994, PASJ, 46, L125
Krolik J. H., Kallman T. R., 1983, ApJ, 267, 610
Lynden-Bell D., Pringle J. E., 1974, MNRAS, 168, 60
Millar T. J., Farquhar P. R. A., Willacy K., 1997, A&AS, 121, 139
Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C., 1981, Icarus, 45, 517
Oppenheimer M., Dalgarno A., 1974, ApJ, 192, 29
Papaloizou J. C. B., Terquem C., 1999, ApJ, 521, 823
Sano T., Miyama S. M., Umebayashi T., Nakano T., 2000, ApJ, 543, 486
Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, A&A, 24, 337
Spitzer L., 1978, Physical Processes in the Interstellar Medium. John Wiley & Sons, New York
Stepinski T. F., 1992, Icarus, 97, 130
Umebayashi T., Nakano T., 1988, Prog. Theo. Phys. Suppl., 95, 151
Wardle M., 1999, MNRAS, 307, 849

This paper has been typeset from a TEX/LATEX file prepared by the author.

Annexe B

Développement d'un code type Godunov

Le chapitre 2 a évoqué l'intérêt croissant pour les méthodes numériques modernes tels que les codes de type Godunov. Ces méthodes sophistiquées suscitent un grand espoir pour la nouvelle génération de codes numériques. En effet, elles permettent de décrire de manière efficace tous les types d'ondes qui se propagent dans un fluide et sont naturellement adaptées à la description des chocs. Malheureusement, l'extension des méthodes hydrodynamiques à la MHD pose de nombreux problèmes et il n'existe pas encore de codes fiables, efficaces et facile à utiliser qui tirent partie des méthodes de Godunov pour la résolution des équations MHD. Ce manque m'a conduit à m'intéresser à ce type de méthodes en collaboration avec R.Teyssier (CEA), E.Dormy (IPGP et ENS) et S.Colombi (IAP). Dans cette annexe, je décris la première partie de ce projet, au cours de laquelle nous avons développé un code de dynamo cinématique, c'est à dire permettant de suivre l'évolution d'un champ magnétique dans un écoulement donné. Je présente les méthodes et les premiers résultats que nous avons obtenus, ainsi que les perspectives de cette étude.

Description de la méthode

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation d'induction (2.7) dans l'approximation MHD idéale. Le champ de vitesse est supposé connu analytiquement en tout point de l'espace et à tout instant. Comme dans le cas de *ZEUS-2D* et *GLOBAL*, le champ magnétique est positionné sur les faces des cellules de la grille de calcul, ce qui permet d'utiliser la méthode du transport contraint mentionnée dans le chapitre 2 pour calculer l'évolution du champ magnétique tout en conservant la contrainte $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$. Cependant, dans ce cas cinématique simple pour lequel la propagation des ondes d'Alvén n'intervient pas, la méthode des caractéristiques utilisée dans *ZEUS-2D* (Stone & Norman, 1992b) n'est pas nécessaire et on peut simplement écrire une formule d'ordre 2 en temps et en espace décrivant l'évolution du champ magnétique :

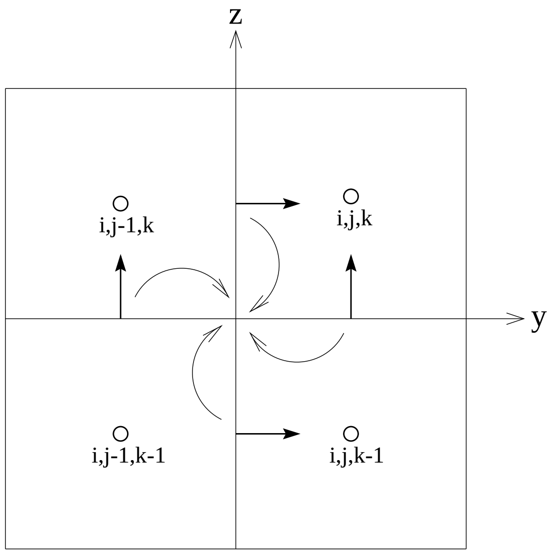

FIG. B.1 – *Illustration de la solution très simple du problème de Riemann 2D. Les champs magnétiques connus sur les faces des cellules sont extrapolés en amont de l'écoulement vers les arêtes des cellules.*

$$\frac{(B_x)^{n+1}_{i,j,k} - (B_x)^n_{i,j,k}}{\Delta t} = \frac{(E_y)^{n+1/2}_{i,j,k} - (E_y)^{n+1/2}_{i,j,k+1}}{\Delta z} + \frac{(E_z)^{n+1/2}_{i,j+1,k} - (E_z)^{n+1/2}_{i,j,k}}{\Delta y} \tag{B.1}$$

où les termes $(E_y)^{n+1/2}_{i,j,k}$ et $(E_z)^{n+1/2}_{i,j,k}$ sont les forces électromotrices calculées sur les arêtes à l'instant $t + dt/2$, noté par l'exposant $n + 1/2$. Elles sont calculées par des relations du type :

$$(E_y)^{n+1/2}_{i,j,k} = (\bar{v}_z)^{n+1/2}_{i,j,k} \left(\bar{B}_x\right)^{n+1/2}_{i,j,k} - (\bar{v}_x)^{n+1/2}_{i,j,k} \left(\bar{B}_z\right)^{n+1/2}_{i,j,k} . \tag{B.2}$$

par exemple dans le cas de $(E_y)^{n+1/2}_{i,j,k}$. Les variables $(\bar{v}_x)^{n+1/2}_{i,j,k}$ et $(\bar{v}_z)^{n+1/2}_{i,j,k}$ sont les vitesses sur les arêtes (connues analytiquement). Quant à $\left(\bar{B}_z\right)^{n+1/2}_{i,j,k}$ et $\left(\bar{B}_x\right)^{n+1/2}_{i,j,k}$, ce sont les valeurs des champs magnétiques sur les arêtes. Pour les obtenir, il faut les interpoler en temps et en espace à partir des champs magnétiques originaux qui sont situés sur les faces des cellules. En fait, comme le montre la figure (B.1), il s'agit de résoudre pour chaque arête une problème de Riemann à 2 dimensions dans le plan orthogonal à cette arête. Ce problème, très (trop ?) compliqué pour un problème dynamique, s'avère trivial dans le cas cinématique, puisqu'il se réduit à une interpolation "amont" du champ magnétique, c'est à dire qu'après avoir interpolé en temps et en espace chaque composante du champ magnétique vers chacune des arêtes, on utilise le signe de la vitesse du fluide sur l'arête pour choisir la composante du champ qui est en amont de l'écoulement. La partie spatiale de l'interpolation est faîte en utilisant la relation :

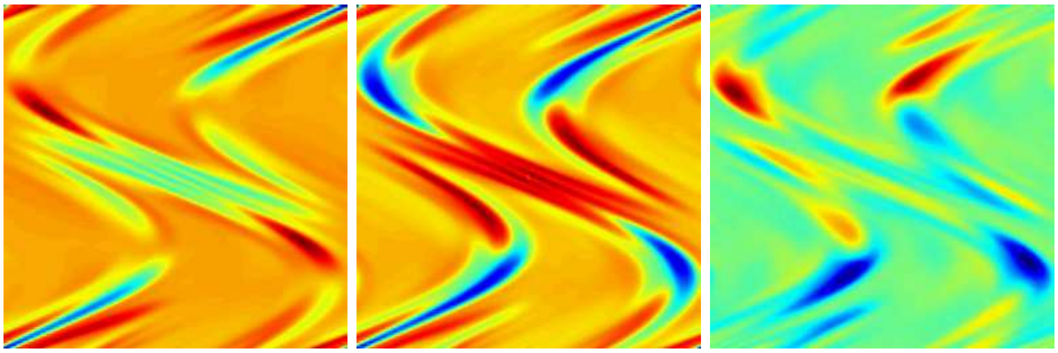

FIG. B.2 – *Coupe des différentes composantes du champ magnétique dans le plan* $z = 0.5$ *(les composantes suivant* x, y *et* z *sont représentées de gauche à droite). La résolution de la simulation est* $(N_x, N_y, N_z) = (128, 128, 8)$.

$$(\bar{B}_z)^n_{i,j,k} = (B_z)^n_{i,j,k} - \frac{1}{2}\Delta_j\,,$$
$$(\bar{B}_z)^n_{i,j+1,k} = (B_z)^n_{i,j,k} + \frac{1}{2}\Delta_j\,, \tag{B.3}$$

où Δ_j est calculé en utilisant la pente centrale monotone, ou "monotonized central slope" en anglais (Toro, 1997). Pour la partie temporelle (de pas de temps $dt/2$), on utilise :

$$\begin{aligned}(\bar{B}_z)^{n+1/2}_{i,j,k} = (\bar{B}_z)^n_{i,j,k} \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left((\bar{E}_y)_{i+1,j,k} - (\bar{E}_y)_{i,j,k}\right)\\ &- \quad \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left((\bar{E}_x)_{i,j+1,k} - (\bar{E}_x)_{i,j,k}\right)\,,\end{aligned} \tag{B.4}$$

où $\bar{E}_x$ (respectivement $\bar{E}_y$) sont obtenus à partir des interpolations spatiales amonts du champs magnétiques dans les directions y et z (respectivement x and z) obtenues par la relation (B.3).

L'algorithme ainsi décrit (accompagné bien sûr d'une condition de Courant appropriée) permet de calculer l'évolution du champ magnétique lorsque le champ de vitesse est donné. Dans les paragraphes suivants, je présente deux applications simples de cet algorithme, qui ont ici valeur de test.

Application au cas d'une dynamo rapide

Nous avons d'abord appliqué notre méthode au cas d'un écoulement de type ABC qui combine deux ondes de Beltrami (Childress & Gilbert, 1995) pour lesquelles les différentes composantes de la vitesse varient sinusoïdalement en temps et en espace.

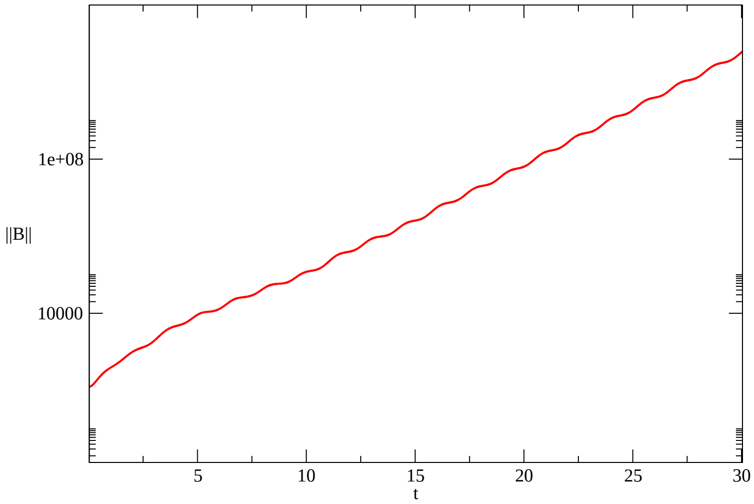

FIG. B.3 – *Croissance exponentielle de la norme du champ magnétique au cours de la simulation. Les oscillations de petite amplitude superposées à la croissance de* $\boldsymbol{B}$ *sont dues aux variations sinusoïdales de l'écoulement. La résolution dans ce cas est* $(N_x, N_y, N_z) = (128, 128, 16)$.

Le but de ce test est de vérifier la croissance du champ magnétique même lorsque la résistivité du milieu est nulle, ce qui est une propriété des *dynamos rapides* dont fait partie cet écoulement. À l'inverse, le taux de croissance des *dynamos lentes* tend vers zéro lorsque la conductivité tend vers l'infini. Dans ce cas, une résistivité non nulle est nécessaire afin de faciliter la reconnection du champ magnétique. Le champ de vitesse de l'écoulement que nous avons étudié est défini par :

$$v_x(x,y,z,t) = 2\ \sin^2 t\ \sin y \tag{B.5}$$
$$v_y(x,y,z,t) = 2\ \cos^2 t\ \sin x \tag{B.6}$$
$$v_z(x,y,z,t) = 2\ \cos^2 t\ \cos x - 2\ \sin^2 t\ \cos y\,. \tag{B.7}$$

Le calcul est fait sur une grille uniforme de dimension unitaire dans les trois directions de l'espace. Au bord de la grille, les conditions aux limites sont périodiques. Enfin, le champ magnétique qui sert de condition initiale à la simulation est donné par :

$$B_x(x,y,z) = -\sin z\,. \tag{B.8}$$

La figure B.2 montre trois images, correspondant de gauche à droite aux composantes du champ magnétique suivant les directions x, y et z à $t = 11.4$. Il est clair que l'écoulement étire le champ magnétique et que celui–ci varie maintenant à des échelles plus petites

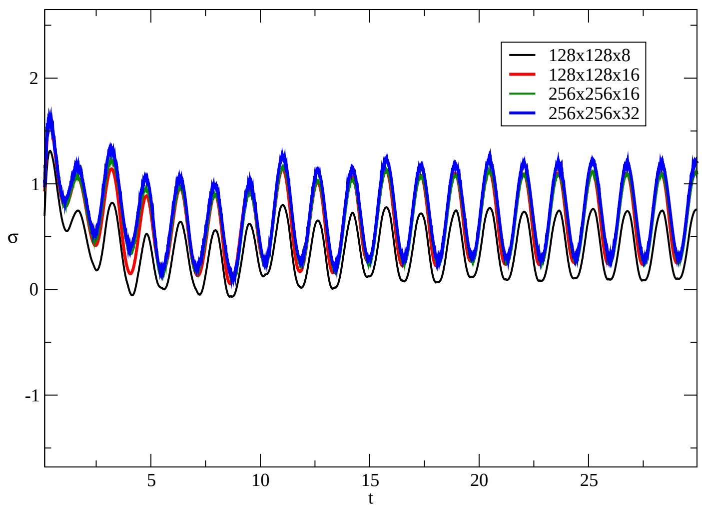

Fig. B.4 – *Taux de croissance de la norme du champ magnétique pour différentes résolutions en fonction du temps. Le taux de croissance est à peu près constant et converge vers une valeur indépendante de la résolution, ce qui est caractéristique des dynamos rapides.*

que la taille de la boite. Sur la figure B.3, la norme du champ magnétique $\|\boldsymbol{B}\|$ est représentée en fonction du temps pour une simulation de résolution $(N_x, N_y, N_z) = (128, 128, 16)$. L'échelle verticale est logarithmique, ce qui montre que la croissance de $\|\boldsymbol{B}\|$ est exponentielle. Les petites oscillations qui apparaissent superposées à la courbe sont dues à la variation sinusoïdale du champ de vitesse. Ces oscillations apparaissent également sur la figure B.4, qui montre le taux de croissance du champ, c'est à dire la quantité

$$\sigma = \frac{\|\boldsymbol{B}(t+dt)\| - \|\boldsymbol{B}(t)\|}{dt}. \tag{B.9}$$

Hormis ces variations, le taux de croissance est à peu près constant et surtout, il varie très peu d'une simulation à l'autre. Hors, varier la résolution revient à changer l'échelle de reconnection, et donc modifier la résistivité : la dissipation est d'autant plus faible que la résolution est grande. Le résultat de la figure B.4 montre donc qu'un taux de croissance non nul subsiste aux faibles résistivités, ce qui démontre que l'écoulement étudié produit bien une dynamo rapide.

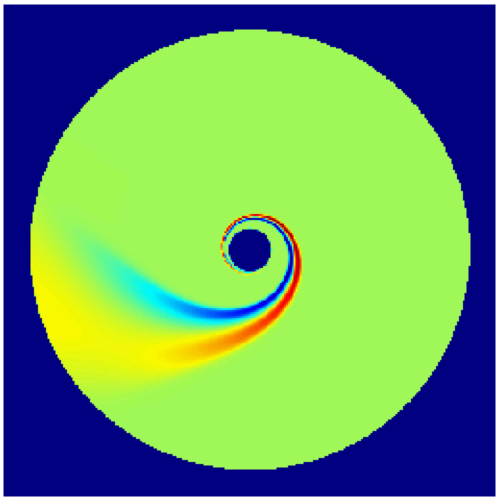

FIG. B.5 – *Composante orthoradiale du champ magnétique dans un disque en rotation différentielle. Le champ magnétique initial est simplement une boucle de courant centrée en $\phi = \pi$. La rotation différentielle v_ϕ = cte enroule les lignes de champs autour de la singularité centrale. La résolution de la simulation est* $(N_r, N_\phi, N_z) = (256, 256, 4)$.

Passage à une géométrie cylindrique

Par ailleurs, j'ai adapté la méthode décrite précedemment à une géométrie cylindrique. L'objectif à long terme est d'étudier l'origine du champ magnétique dans notre galaxie, et en particulier de déterminer si une dynamo cinématique peut en être à l'origine. À plus court terme, ce code sera appliqué à un écoulement du type Pono-Marenko (Childress & Gilbert, 1995).

La méthode décrite précedemment s'adapte aisément à une géométrie cylindrique. Il s'agit simplement de tenir compte de l'expression particulière des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques. Par exemple, l'équivalent de l'équation (B.1) pour la composante radiale B_r du champ magnétique s'écrit :

$$\frac{B_r^{n+1} - B_r^n}{dt} = \frac{(E_\phi)_{i,j,k}^{n+1/2} - (E_\phi)_{i,j,k+1}^{n+1/2}}{\Delta z} + \frac{1}{r}\frac{(E_z)_{i,j+1,k} - (E_z)_{i,j,k}}{\Delta\phi}\,. \tag{B.10}$$

Dans cette expression, E_ϕ et E_z sont les forces électromotrices dans le repère cylindrique.

La modification principale du code cylindrique par rapport au code cartésion concerne les conditions de bord. Elles sont toujours périodiques dans la direction orthoradiale. En revanche, dans les directions radiales et verticales, la composante du champ orthogonale à la surface est libre tandis que les composantes parallèles sont nulles.

Pour tester ce code, nous avons calculé l'évolution d'une bouche de champ magnétique dans un disque en rotation. Lorsque la rotation est solide ($v_\phi \propto r$), la bouche est advectée sans déformation par l'écoulement. Par contre, si la rotation est différentielle, les lignes de champ magnétique sont étirées et s'entoure autour du centre du repère cylindrique. Le résultat est illustré par la figure B.5, qui montre l'intensité du champ magnétique orthoradial ($B_\phi > 0$ dans les zones rouges de l'image, $B_\phi < 0$ dans les zones bleues) : il adopte une configuration spirale à cause de la variation de la vitesse angulaire en $1/r$.

Perpectives

Dans cette annexe, j'ai décrit la partie préliminaire de notre travail sur les codes de type Godunov. Outre le fait qu'elle a pu nous familiariser avec ces techniques, nous avons aussi mis en place des outils numériques qui vont nous permettre d'étudier la physique des dynamos rapides. En particulier, un des objectifs est de déterminer si un traitement cinématique suffit pour décrire la dynamo à l'origine du champ magnétique galactique. Nous envisageons également de coupler ce code à des simulations N–corps pour étudier la distribution du champ magnétique qui résulte de la croissance des grandes structures dans l'univers primordial.

Enfin, la partie principale de ce projet consistera à inclure un solveur de Riemann MHD dans le code hydrodynamique à rafinement de maille adaptatif *RAMSES* écrit par Teyssier (2002).

Annexe C

Calcul des Fonctions de Legendre

Cette annexe présente l'algorithme que j'ai utilisé pour évaluer numériquement les fonctions de Legendre demi-entière de seconde espèce $Q_{m-1/2}(x)$, pour un argument x de norme toujours supérieure à 1 (cf chapitre 2). La méthode que je présente ici est largement basée sur l'article de Segura & Gil (1999).

Définitions

Les fonctions de Legendre demi-entière de seconde espèce font partie plus généralement des fonctions de Legendre associées $Q_\nu^r(z)$ et $P_\nu^r(z)$, où z est à priori un nombre complexe. Ces fonctions sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-z^2)\frac{du}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]u = 0 \tag{C.1}$$

Elles satisfont aussi à deux relations de réccurence sur les indices ν et les exposants r :

$$\begin{aligned} (\nu-r+1)P_{\nu+1}^r(z) - (2\nu+1)zP_\nu^r(z) + (\nu+r)P_{\nu-1}^r(z) &= 0 && \text{(C.2)} \\ P_\nu^{r+1}(z) + \frac{2rz}{(z^2-1)^{1/2}}P_\nu^r(z) - (\nu-r+1)(\nu+r)P_\nu^{r-1}(z) &= 0\,, && \text{(C.3)} \end{aligned}$$

ainsi que deux relations qui découlent de l'expression du Wronskien du système :

$$\begin{aligned} P_\nu^r(z)Q_{\nu-1}^r(z) - P_{\nu-1}^r(z)Q_\nu^r(z) &= \frac{\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(\nu-r+1)}(-1)^r && \text{(C.4)} \\ P_\nu^r(z)Q_\nu^{r+1}(z) - P_\nu^{r+1}(z)Q_\nu^r(z) &= \frac{\Gamma(\nu+r+1)}{\Gamma(\nu-r+1)}\frac{(-1)^r}{\sqrt{z^2-1}}\,. && \text{(C.5)} \end{aligned}$$

Lorsque l'argument z est réel et l'indice $\nu = m - 1/2$ est demi–entier, les fonctions $\{P_{m-1/2}^r(x), Q_{m-1/2}^r(x)\}$ sont appelées *harmoniques toroïdales.* Les fonctions de Legendre demi–entière de seconde espèce dont je me suis servi pour la détermination du potentiel gravitationnel correspondent donc au cas particulier $r = 0$. Elles seront notés $\{P_{m-1/2}(x), Q_{m-1/2}(x)\}$.

Théorème

Les harmoniques toroïdales ont la propriété de satisfaire toutes les deux à une relation de récurrence à trois termes. Or, dans ce cas, une des deux solutions est dite minimale et l'autre maximale. Si f_n est la solution minimale et g_n la solution maximale, cela signifie que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 0\,. \tag{C.6}$$

Le problème est que les valeurs numériques de la solution minimale sont de plus en plus petites et que chaque terme de la réccurence s'obtient comme la soustraction de deux termes d'indices inférieurs. Par conséquent, les erreurs d'arrondis conduisent très vite à une mauvaise évaluation de cette solution. La rêgle est donc de calculer la solution minimale en utilisant la réccurence dans le sens des indices décroissant.

Notons pour finir que le théorème de Pincherle donne le rapport de deux termes consécutifs de la solution minimale :

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = -\frac{b_k}{a_k - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1} - \frac{b_{k+2}}{a_{k+2} - \cdots}}}\,, \tag{C.7}$$

où le terme de droite de cette relation est une fraction continue.

Algorithme

Le problème posé par la détermination des fonctions de Legendre demi-entière de seconde espèce est que $Q_{m-1/2}$ est justement la solution minimale de la relation de réccurence (C.2). L'idée est donc de calculer la solution maximale $P_{m-1/2}$ pour $m \in [0, M_{max}]$, puis de calculer $Q_{M_{max}-1/2}$ et $Q_{M_{max}-3/2}$ en combinant les équations (C.4) et (C.7) et enfin d'utiliser (C.2) dans le sens des indices décroissants pour obtenir $Q_{m-1/2}$.

Une difficulté supplémentaire vient du fait que les conditions initiales sont données sur Q :

$$Q^0_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(x+1)}K(\sqrt{2/(x+1)}) \tag{C.8}$$

$$Q^1_{-1/2}(x) = -E(\sqrt{2/(x+1)})/\sqrt{2(x-1)} \tag{C.9}$$

où $K(x)$ et $E(x)$ sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce, calculées en suivant l'algorithme présenté dans *Numerical Recipes* (Press *et al.* , 1986). Il est nécessaire à partir de ces deux relations de calculer $P_{-1/2}$ et $P_{1/2}$. Pour cela, on tient compte du fait que la fonction $P^r_{m-1/2}$ est la solution minimale de la réccurence (C.3) sur l'exposant r. On peut donc en particulier évaluer le rapport $P^1_{-1/2}/P_{-1/2}$ sous la forme d'une fraction continue, puis utiliser la relation (C.5) pour calculer $P_{-1/2}$. La fonction $P_{1/2}$ est alors une conséquence directe de l'équation (C.2).